



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School

工程硕士数学

第五章 插值法

胡振中 副教授

海洋大楼 702-3, 15999640239 (微信同号)

邮箱: huzhenzhong@tsinghua.edu.cn

个人网站: <http://www.huzhenzhong.net>

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

5.1 概论及背景知识

5.2 Lagrange插值多项式

5.3 Newton插值多项式

5.4 Hermite插值

5.5 分段低次插值方法

5.6 三次样条插值函数

5.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

三次样条插值

三次样条函数

样条插值函数

编程实践

在现代实验科学中，经常遇到类似如下的问题

自变量 x_i

样品浓度(ppb)	100	200	500	1000	2000	5000
信号强度	1450	3550	6100	12200	24400	49800

测量值 $f(x_i)$

为了探索某一实验现象的规律，我们需要得到关系： $f(x)$

思路1

如果 $f(x)$ 是一个难以描述的复杂函数，我们能否找一个或者一系列简单函数 $\varphi(x)$ 来近似，并且满足在已知的实验点 x_i 上 $\varphi(x_i) = f(x_i)$

思路2

不严格要求 $\varphi(x_i) = f(x_i)$ ；而是在全局范围内找到一个近似函数 $\tilde{f}(x)$

概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

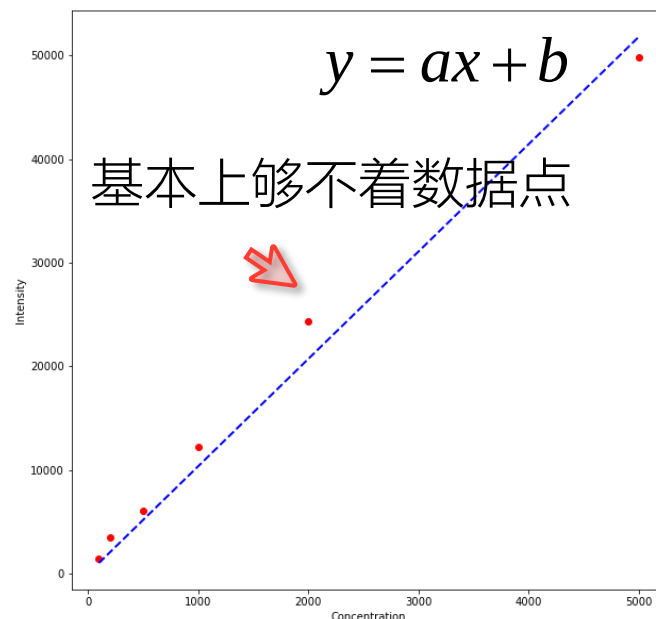
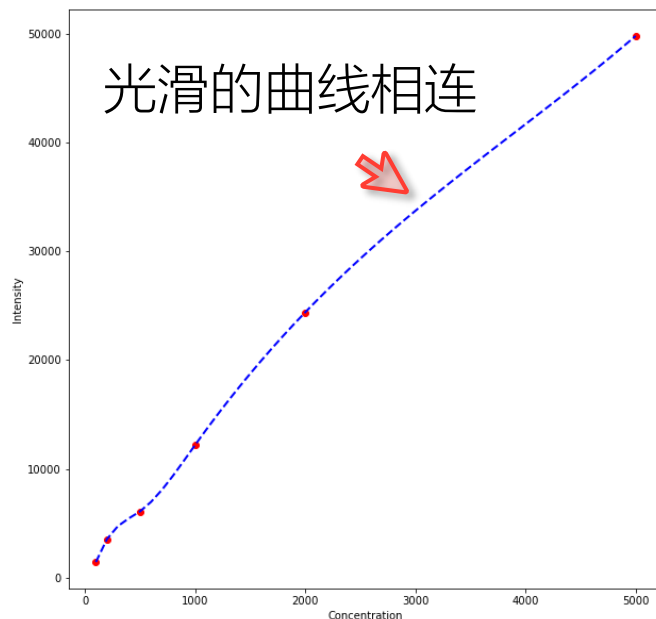
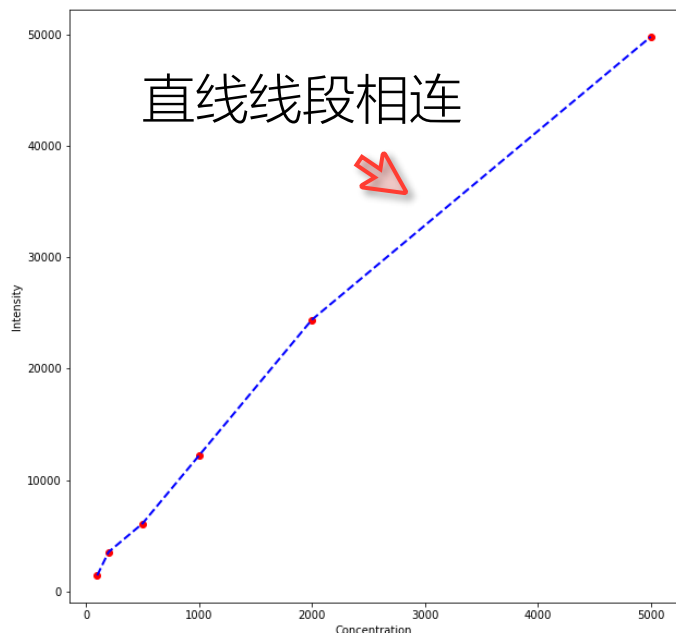
三次样条插值

三次样条函数

样条插值函数

编程实践

不同的同学在毕业答辩中给出不同的数据表示



思路1

思路2

插值法 (本章)

函数逼近/拟合 (下章)



此处暂时不讨论针对具体的问题，到底应该用哪种表示方法

插值问题——数字图像



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

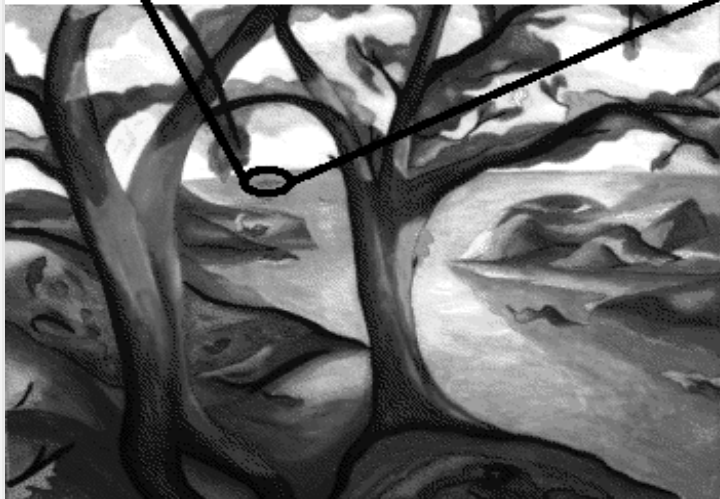
三次样条插值

三次样条函数

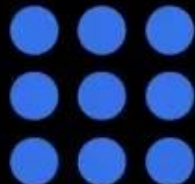
样条插值函数

编程实践

0.2051	0.2157	0.2826	0.3822	0.4391		
0.5342	0.2251	0.2563	0.2826	0.2826	0.4391	0.4391
0.5342	0.1789	0.1307	0.1789	0.2051	0.3256	0.2483
0.4308	0.2483	0.2624	0.3344	0.3344	0.2624	0.2549
0.3344	0.2624	0.3344	0.3344	0.3344	0.3244	



Pixels of the
given image



Reconstruction

Pixels of the
reconstructed image



插值问题——数字图像



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

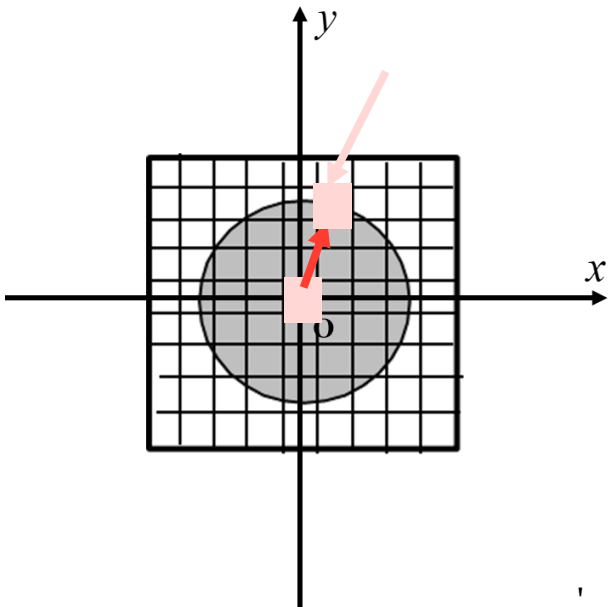
三次样条插值

三次样条函数

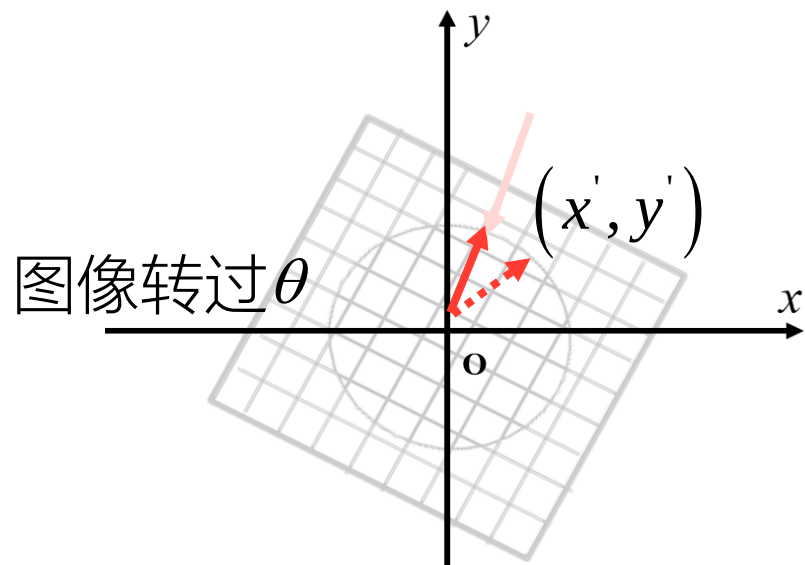
样条插值函数

编程实践

$$(r \cos \alpha, r \sin \alpha) = (x, y) = (i, j), i, j \in \mathbb{Z}$$



$$(x, y) = (i, j), i, j \in \mathbb{Z}$$



$$x' = r \cos(\alpha - \theta) = r \cos \alpha \cos \theta + r \sin \alpha \sin \theta = x \cos \theta + y \sin \theta$$

$$y' = r \sin(\alpha - \theta) = r \sin \alpha \cos \theta - r \cos \alpha \sin \theta = y \cos \theta - x \sin \theta$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

通常情况：旋转后的点不再是整数网格点
但是，数字图像依然要在整数网格上取值

插值问题——数字图像



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

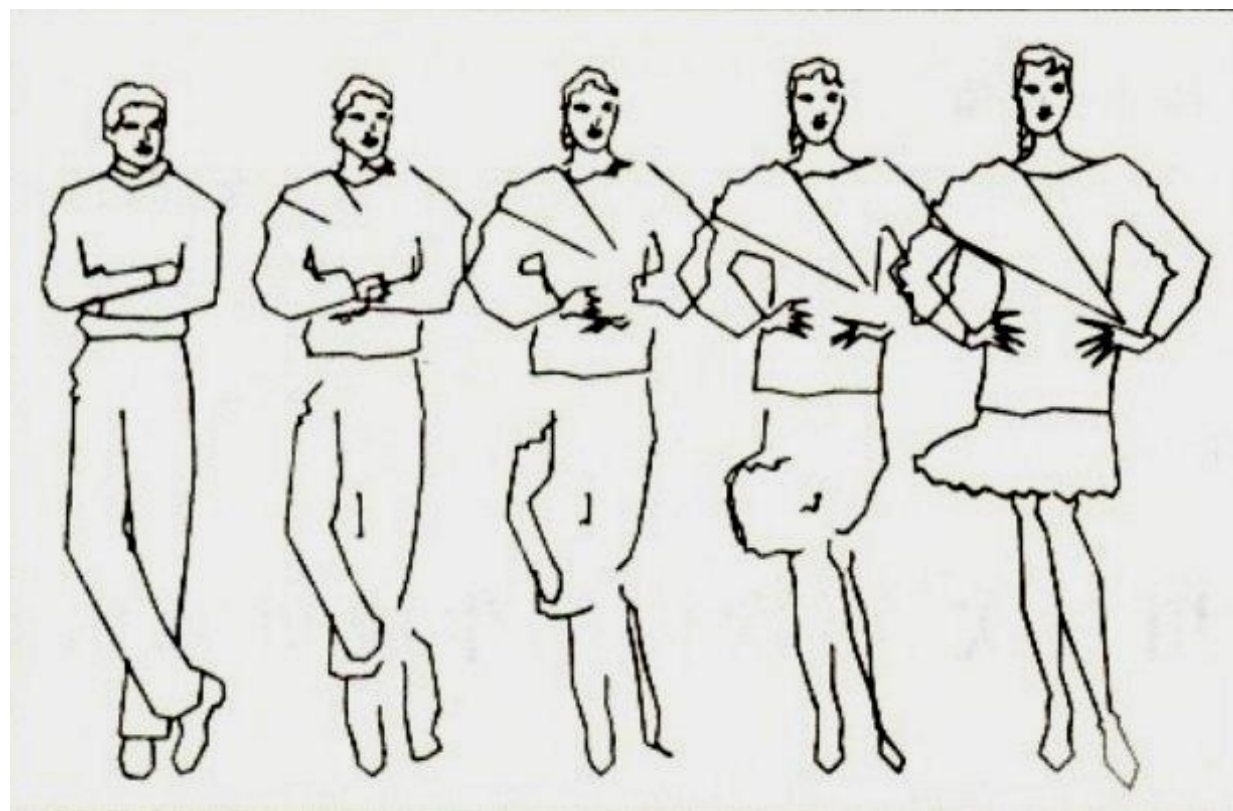
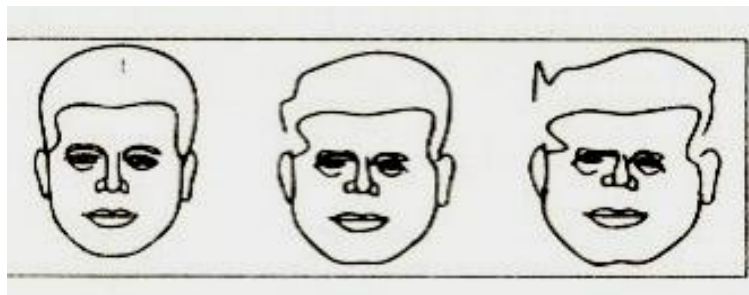
三次样条插值

三次样条函数

样条插值函数

编程实践

两点的线性插值在计算机图形学中最常见的应用就是进行动画的关键帧插值 $P = A(1 - t) + Bt$



插值问题——定义



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章



约瑟夫·拉格朗日

(Joseph-Louis Lagrange, 1736~1813)

插值问题

设已知区间 $[a, b]$ 上的实值函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个相异的节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ 处有

$$f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$$

寻找一个简单函数 φ 代替 f ，并作为整个区间上 $f(x)$ 的近似值，满足

$$\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$$

$f(x)$ 称为**被插值函数**； $x_0, x_1, \dots, x_n$ 被称为**插值节点**； $[a, b]$ 为**插值区间**

函数在插值区间外的值也可以外推，被称为外插（extrapolation）

概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n 次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

三次样条插值

三次样条函数

样条插值函数

编程实践

概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

三次样条插值

三次样条函数

样条插值函数

编程实践

插值问题

$\varphi(x)$ 被称为**插值函数**; $\varphi(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ 称为**插值条件**

插值函数可以是代数多项式函数

$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 被称为**插值多项式** ✓ 本章讨论内容

Lagrange插值、Newton插值、Hermite插值、三次样条插值...

可以是其他各种函数, 比如

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - W_N^{-k} e^{-j\omega}}$$

离散信号的连续频谱 $X(e^{j\omega})$ 可以由 N 个离散傅里叶变换DFT的离散值 $X(k)$ 插值得到, 插值函数为复三角函数

概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

三次样条插值

三次样条函数

样条插值函数

编程实践

定理

假定插值函数定义在 $[a, b]$ 区间不超过 n 次的**代数多项式空间**上, 即

$$p \in P^n[a, b]$$

且有 $n+1$ 个插值节点 $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, 满足插值条件

$$p(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$$

则 $p(x)$ 是**存在且唯一**的

证明

由 $n+1$ 个插值条件可得

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

n 次多项式
有 $n+1$ 个待
定系数

存在唯一性定理



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

证明 (续) : $\bar{x} = [a_0, a_1, \dots, a_n]^T_{n+1}$ $\bar{b} = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^T_{n+1}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}$$

求该多项式即为求线性方程组: $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$ 的解

范德蒙德 (Vandermonde) 矩阵

$\det(\mathbf{A}) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0$ 因而解唯一存在, 即多项式也是唯一存在的

这一定理在理论上把插值问题变成了线性方程组问题, 但是实际中却不使用这一方法, 因为求解过程过于繁杂

概论

插值问题
存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
 n 次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

广义罗尔定理

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) \in C^n[a, b]$; 满足 $f(x)$ 在 $n+1$ 个点: $x_i \in (a, b), i = 0, 1, 2, \dots, n$ 上取值相等
那么存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f^{(n)}(\xi) = 0$

代数基本定理

n 次多项式最多有 $n(n \geq 1)$ 个不同的零点

如果一个多项式有 $n(n \geq 1)$ 个不同的零点, 那么?

不超过 n 次的多项式在 $(n + 1)$ 个不同点取值相同, 那么?

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

5.1 概论及背景知识

5.2 Lagrange插值多项式

5.3 Newton插值多项式

5.4 Hermite插值

5.5 分段低次插值方法

5.6 三次样条插值函数

5.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

一个最简单的模型

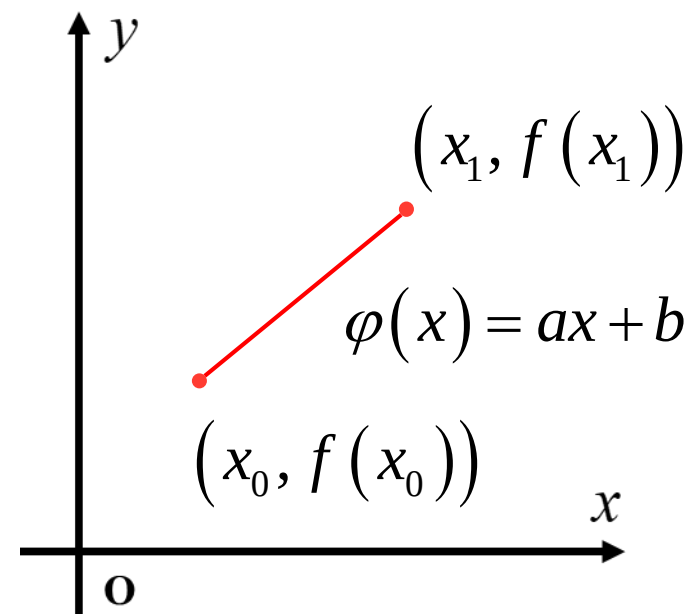
已知两点 $x_0 < x_1$, 函数取值 $f(x_0), f(x_1)$, 由此确定一个线性插值函数 $\varphi(x)$, 满足

$$\varphi(x_0) = f(x_0), \varphi(x_1) = f(x_1)$$

$$\begin{cases} ax_0 + b = f(x_0) \\ ax_1 + b = f(x_1) \end{cases} \Rightarrow a = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow b = f(x_0) - x_0 \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\varphi(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (f(x_1) - f(x_0)) + f(x_0)$$



概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

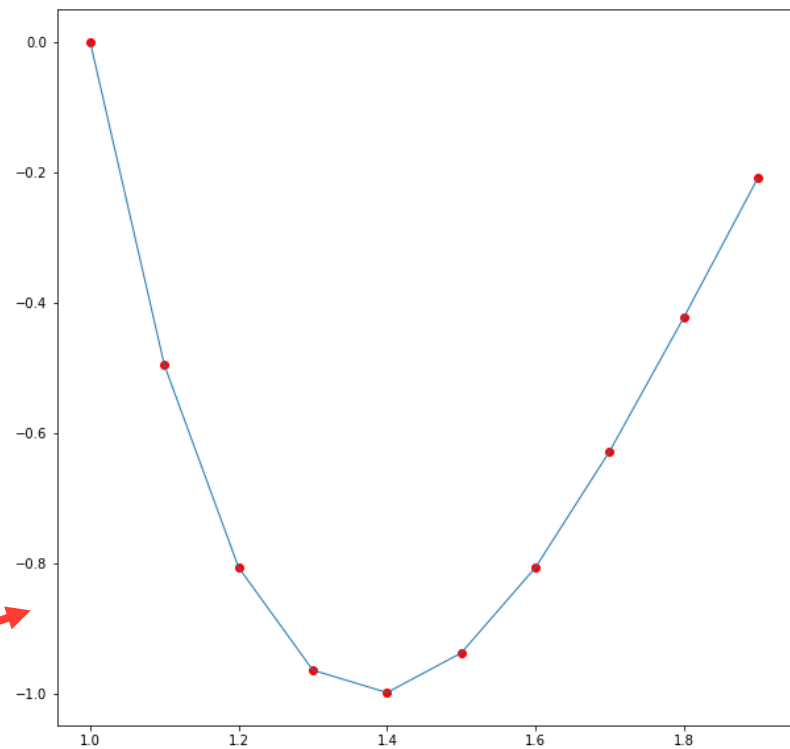
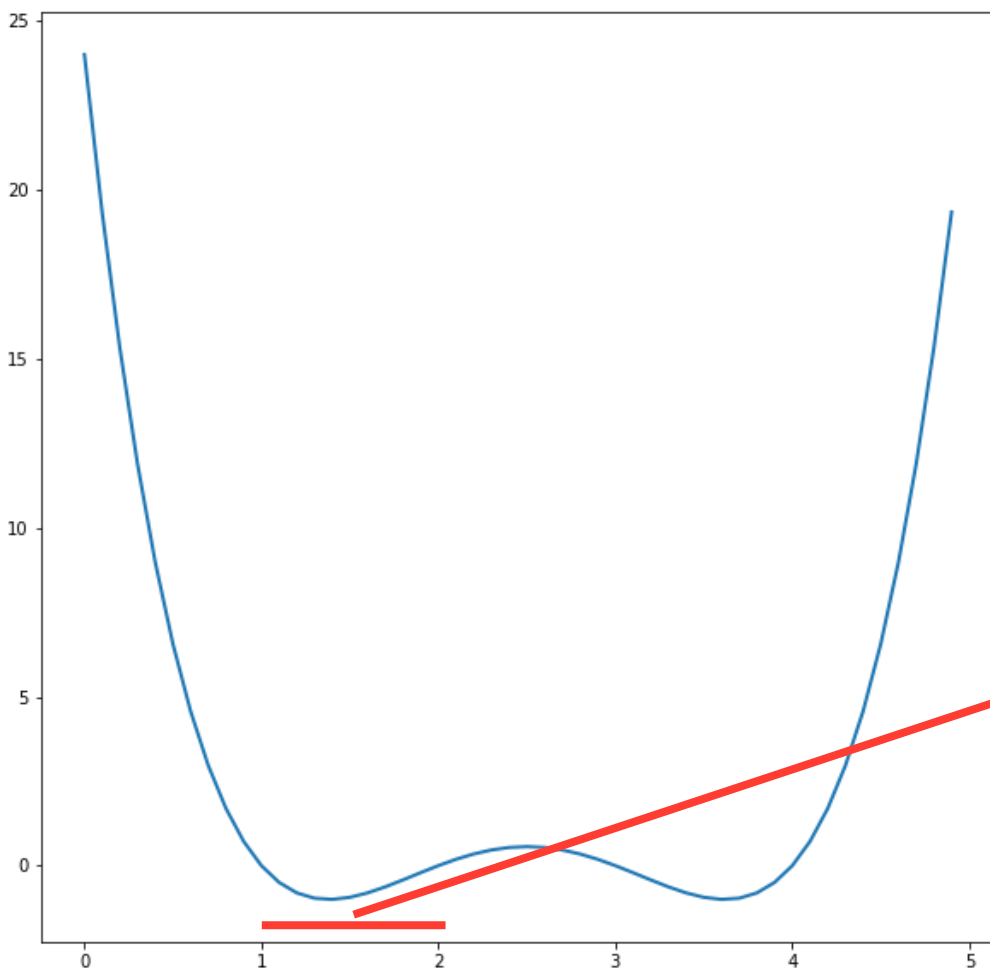
Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

注意： matlab或者python中用的plot函数其实都是这种方式连接离散数据点



x	float64	(50,)	[0. 0.1 0.2 ... 4.7 4.8 4.9]
f	float64	(50,)	[24. 19.3401 15.3216 ... 11.8881 15.3216 19.3401]

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

从简单的模型中总结规律

$$\varphi(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} (f(x_1) - f(x_0)) + f(x_0)$$

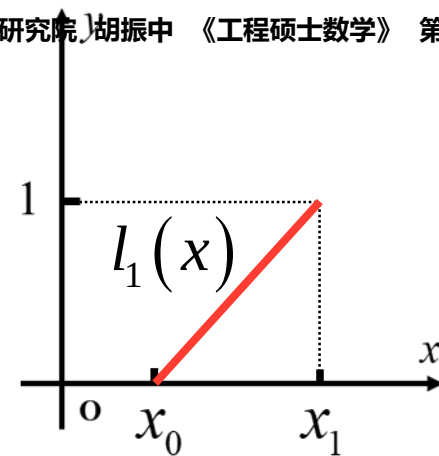
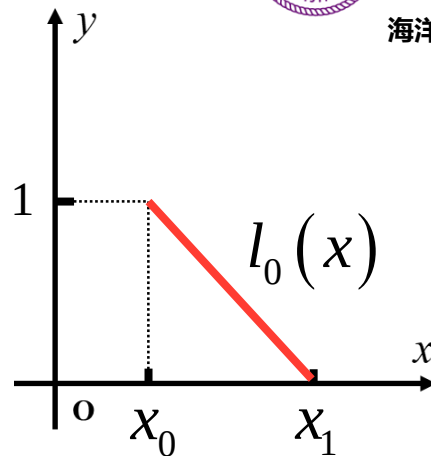
$$\Rightarrow \varphi(x) = f(x_0) \left(1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

记: $l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$, $l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$ 为插值的**基函数**

则插值多项式可以写成

$$L_1(x) = l_0(x) f(x_0) + l_1(x) f(x_1) \quad \text{一次Lagrange插值多项式}$$

即插值多项式是基函数 l_0, l_1 的线性组合, 且组合系数是函数在节点处的取值



n次Lagrange插值多项式



清华大学 深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

定理6.1.1 (书上编号)

存在唯一的多项式 $L_n \in P^n$ 满足 $L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$ $i = 0, 1, 2, \dots, n$

证明

①我们已经给出了该多项式的形式，因而存在性无需证明

②唯一性：反证法！

如果有另一个多项式 $L'_n \in P^n$ 也满足该插值条件，则 $L_n - L'_n \in P^n$ ，且有 $n+1$ 个零点

$$L_n(x_i) - L'_n(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

代数基本定理： n次多项式只有n个零点，矛盾！

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

我们讨论在非插值的节点处 $x \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$ 插值函数对原函数的近似效果, 定义

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) \quad \text{为插值余项 (插值误差)}$$

定理6.1.2 (书上编号)

设 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 为 $[a, b]$ 上的不同的节点, $f \in C^{n+1}[a, b]$, $L_n(x)$ 为满足插值条件 $L_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ 的 n 次多项式, 那么对于任意的 $x \in [a, b]$ 存在

$$\xi = \xi(x) \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

$$\text{其中: } \omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

证明

①在插值节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 处, $R_n(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) = 0$, 因而都是插值余项的**根**, 即

$$R_n(x) = \underline{K(x)} \omega_{n+1}(x)$$

②引入辅助函数 $\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x) \omega_{n+1}(t)$

$$\varphi(x_i) = f(x_i) - L_n(x_i) - K(x) \omega_{n+1}(x_i) = 0, i = 0, 1, \dots, n$$

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - K(x) \omega_{n+1}(x) = 0$$

此处的 x 即为定理中任取的一个 $x \in [a, b]$

由此得出 $\varphi(t)$ 在 $[a, b]$ 上有 $n+2$ 个不同的零点 $x_0, x_1, \dots, x_n, x$

Lagrange插值余项



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

证明 $\omega_{n+1}(t) = \prod_{i=1}^{n+1} (t - x_i)$ $\Rightarrow$ $[\omega_{n+1}(t)]' = \sum_{j=1}^{n+1} \prod_{i=1, i \neq j}^{n+1} (t - x_i)$ $\Rightarrow$

$n+1$ 项 $n+1$ 项 n 项

③根据罗尔定理，每两个根之间可以找到一个

$$\xi_i^{(1)} \in (a, b), i = 1, 2, \dots, n+1, \text{ 满足 } \varphi'(\xi_i^{(1)}) = 0$$

④反复使用罗尔定理

$$\varphi^{(2)}(\xi_i^{(2)}) = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\varphi^{(3)}(\xi_i^{(3)}) = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$$

.....

$$\varphi^{(n+1)}(\xi_i^{(n+1)}) = 0$$

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x) \omega_{n+1}(t)$$

$n+1$ 阶导数?

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(x) (n+1)!$$

$$K(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

得证!

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

推论6.1.1 (书上编号)

在如上定理的基础上, 若: $\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \leq M_{n+1}$, 那么

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x) \quad |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|$$

很好理解

推论6.1.2 (书上编号)

在如上定理的基础上, 若: $h = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$, 那么

$$\max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$$

有点难理解

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

推论2证明: $h = \max_{1 \leq j \leq n} (x_j - x_{j-1})$

任取 $x \in [x_k, x_{k+1}]$, 记 $\varphi(x) = (x - x_k)(x - x_{k+1})$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 2x - (x_k + x_{k+1}), \varphi''(x) \equiv 2$$

所以, $\varphi(x)$ 在 $x = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ 时有**极小值** $-\frac{1}{4}(x_{k+1} - x_k)^2$

$$\Rightarrow |\varphi(x)| \leq \frac{1}{4}(x_{k+1} - x_k)^2 \leq \frac{1}{4}h^2$$

$$|x - x_0| \leq (k+1)h, \dots, |x - x_{k-1}| \leq 2h; |x - x_{k+2}| \leq 2h, \dots, |x - x_n| \leq (n-k)h$$

$$|\omega_{n+1}(x)| \leq \left| \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) \right| |\varphi(x)| \left| \prod_{j=k+2}^n (x - x_j) \right| \leq (k+1)! h^k \frac{1}{4} h^2 (n-k)! h^{n-k-1} \leq \frac{1}{4} n! h^{n+1}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)| \quad \max_{a \leq x \leq b} |R_n(x)| \leq \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| \quad \text{得证!}$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ Polynomial类设计思路

进行多项式插值时，直接按原样编写对应的一元函数

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad ①$$

⇒

```
UnaryFunction L2 = x =>
{
    ...
}
```

- ❑ 存在重复计算：例如分母在每次调用L2时都会求一遍
- ❑ 信息都被隐藏：无法通过L2对象知道多项式的次数等

将插值多项式转化为如下形式 ②

$$L_2(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

- ❑ 只需保存系数： $[a_0, a_1, \dots, a_n] \rightarrow$ double数组即可
- ❑ 计算过程简单： $(a_2x + a_1)x + a_0$

a_i 的解析表达相当复杂，很难通过人工将①式转化为②式 ⇒ 定义多项式类，让程序来算！

基本思路

- ✓ 始终保持为 $a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ 这样的简单形式，用double数组存储各项系数（有点像向量）
- ✓ 实现多项式的加、减、乘、除等运算，并给出将多项式转化为一元函数的方法

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ Polynomial类使用指南 (Base文件夹)

// 构造一个空多项式, 系数均为0

```
Polynomial p = new Polynomial();
```

// 构造3次项系数为1的多项式

```
p = new Polynomial(3);
```

// 构造 $p = 3x^2 + 2x + 1$

// 注意第一个元素对应0次项

```
p = new Polynomial(1, 2, 3);
```

```
p = new Polynomial(new double[] {  
    1, 2, 3 });
```

// 多项式的次数, 随最高次数项变化

```
int degree = p.Degree;
```

// 对多项式的指定次数项系数赋值

// 可以大于多项式的当前次数

```
p[5] = 0.2;
```

// 多项式的正负

```
Polynomial p1 = +p;
```

```
p1 = -p;
```

// 多项式的加减乘除

```
Polynomial p2 = p + p1;
```

```
p2 = p - p1;
```

```
p2 = p * p1;
```

```
p2 = 3 * p * 2;
```

```
p2 = p / 4;
```

// 改变多项式次数

// 相当于乘 x^n , 但更快

```
p2 = p.AddDegree(2);
```

// n为负数时, 只保留非负次数项

```
p2 = p.AddDegree(-2);
```

// 求导及不定积分

```
p2 = p.Derivative();
```

```
p2 = p.Integral();
```

// 转化为一元函数, 采用秦九韶算法

```
UnaryFunction funcOfP =
```

```
    p.ToFunction();
```

```
double p_3 = funcOfP(3);
```

// 多项式是否恒为0

```
p.IsZero();
```

// 多项式是否等价

```
p.Equals(-p1);
```

// 多项式拷贝

```
p2 = p.Copy();
```

// 拷贝系数到数组

// 注意有Degree+1个系数

```
double[] a =
```

```
    new double[p.Degree + 1];
```

```
p.CopyTo(a);
```

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ Lagrange插值的实现

```
public static Polynomial GenPolynomial(Vector xs, Vector ys)
```

需要插值的所有节点

```
{
    Polynomial ans = new Polynomial();
    for (int i = 0; i < xs.Length; i++)
    {
        Polynomial up = new Polynomial(0);
        double low = 1;
        for (int j = 0; j < xs.Length; j++)
        {
            if (j != i)
            {
                up *= new Polynomial(-xs[j], 1);
                low *= xs[i] - xs[j];
            }
        }
        ans += ys[i] * up / low;
    }
    return ans;
}
```

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$= \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n x - x_j}{\prod_{j=0, j \neq i}^n x_i - x_j}$$

分子多项式

分母常数

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ 多项式插值测试

```
public static void Sample()
{
    UnaryFunction f = x => x * x * x;

    int n = 1;
    Vector xs = Vector.Range(n) / n;
    Vector ys = xs.Mapping(f);

    Polynomial pL = LagrangeInterp.GenPolynomial(xs, ys);
    //Console.WriteLine("拉格朗日插值: ");
    //Console.WriteLine(pL);

    UnaryFunction fL = pL.ToFunction();
    double x0 = 10;
    Console.WriteLine(fL(x0) - f(x0));
}
```

测试外插结果

n	$f_L(x_0) - f(x_0)$
2	-997.5
4	0
7	4.055E-08
15	-1.394E6

当 x_0 取为绝对值较大的外插点时，高次项系数的小偏差很容易引起函数值的较大偏差



插值节点数不一定越多越好

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

5.1 概论及背景知识

5.2 Lagrange插值多项式

5.3 Newton插值多项式

5.4 Hermite插值

5.5 分段低次插值方法

5.6 三次样条插值函数

5.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值 均差

Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

设函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0, x_1, \dots, x_n$, 取值 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$

定义

零阶均差

$$f[x_k] = f(x_k)$$

一阶均差

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

二阶均差

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}$$

j阶均差

$$f[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_{k+j}] - f[x_k, \dots, x_{k+j-1}]}{x_{k+j} - x_k}$$

均差可以逐级递推!

均差—均差表



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

x_k	$f(x_k)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
x_0	$f[x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

性质1

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^k (x_j - x_i)} = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\omega'_{k+1}(x_j)}$$

$$\omega_{k+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_k)$$

性质2（均差对称性）

性质1可以直接推出性质2

改变节点次序，均差值不变，例如： $f[x_0, x_1, \dots, x_k] = f[x_1, x_0, \dots, x_k]$

性质3

$$f \in C^n[a, b] \Rightarrow f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

性质3留待后面证明

$$\xi \in [\min(x_0, x_1, \dots, x_n), \max(x_0, x_1, \dots, x_n)]$$

均差—基本性质

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^k (x_j - x_i)}$$



满足要求

性质1的证明

① 0阶均差不需证明；1阶均差 $f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}$

② k-1阶均差满足要求时，考虑k阶均差

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} = \frac{\sum_{j=1}^k \frac{f(x_j)}{\prod_{i=1, i \neq j}^k (x_j - x_i)} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{\prod_{i=0, i \neq j}^{k-1} (x_j - x_i)}}{x_k - x_0}$$

1到k-1有重合

以取 $j=1$ 为例

$$\frac{f(x_1)(x_1 - x_0) - f(x_1)(x_1 - x_k)}{(x_k - x_0) \prod_{i=0, i \neq 1}^k (x_1 - x_i)} = \frac{f(x_1)}{\prod_{i=0, i \neq 1}^k (x_1 - x_i)}$$

..... 剩余: $f(x_0), f(x_k)$

得证!

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

从2点开始

$$f[x, x_0, x_1] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x, x_0]}{x_1 - x} \Rightarrow f[x_0, x_1] - f[x, x_0] = (x_1 - x) f[x, x_0, x_1]$$

$$\Rightarrow f[x_0, x_1] - \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = (x_1 - x) f[x, x_0, x_1]$$

$$\Rightarrow f(x) = \boxed{f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1]} + (x_0 - x)(x_1 - x) f[x, x_0, x_1]$$

$$\text{记: } N_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f[x_0, x_1]$$

$$\text{显然} \begin{cases} N_1(x_0) = f(x_0) \\ N_1(x_1) = f(x_1) \end{cases} \Rightarrow \text{由插值多项式的唯一性原理可知: } N_1(x) = L_1(x)$$

Newton插值公式



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

推广到一般形式: $f[x, x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1, x_2] - f[x, x_0, x_1]}{x_2 - x}$

$$\Rightarrow f[x, x_0, x_1] = f[x_0, x_1, x_2] + (x - x_2) f[x, x_0, x_1, x_2] \Rightarrow \dots\dots$$

$$\Rightarrow f[x, x_0, \dots, x_{n-2}] = f[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}] + (x - x_{n-1}) f[x, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$$

$$\Rightarrow f[x, x_0, \dots, x_{n-1}] = f[x_0, x_1, \dots, x_n] + (x - x_n) f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]$$

从n往前带入

$$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) + f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

$\Rightarrow N_n(x) = L_n(x)$

$R_n(x)$ 均差型余项

n次Newton插值多项式

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

- 掌握**插值方法**和**余项**概念
- 理解**存在唯一性证明**的思路和计算过程
- 掌握**Lagrange插值**的方法
- 掌握**Newton插值**的方法

作业

教材P188-3、 P188-6 、 P188-7

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

证明一下之前的性质3 $f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$

令: $g(x) = f(x) - N_n(x)$, 根据插值条件, 其应该有 $n+1$ 个零点,
应用广义罗尔定理

$$f^{(n)}(\xi) - N_n^{(n)}(\xi) = 0$$

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$

$\Rightarrow N_n^{(n)}(\xi) = n! f[x_0, x_1, \dots, x_n]$

n阶导数只剩这项, 我们已经推导过! $\Rightarrow f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi)$

在罗尔定理的使用中, 保证了 $\xi \in \left(\min_{0 \leq i \leq n} \{x_i\}, \max_{0 \leq i \leq n} \{x_i\} \right)$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

刚才的均差型余项

$$R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$

Lagrange插值的微分型余项

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$
$$f[x, x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

完全等价!

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

Lagrange形式

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) \quad l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)}$$

余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$

Newton形式

$$N_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

先做表格

余项 $R_n(x) = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$

完全一致!

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

5.1 概论及背景知识

5.2 Lagrange插值多项式

5.3 Newton插值多项式

5.4 Hermite插值

5.5 分段低次插值方法

5.6 三次样条插值函数

5.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

基函数构造法—准备知识



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

设已知区间 $[a, b]$ 上的实值函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个相异的节点 $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ 处有: $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ 以及 $f'(x_0), f'(x_1), \dots, f'(x_n)$

节点处函数的导数值

寻找一个 $2n+1$ 阶的多项式 $H_{2n+1} \in P_{2n+1}[a, b]$ 满足

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \\ H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \end{cases}, i = 0, 1, \dots, n$$

Hermite插值多项式

显然, 这是一个 $2n+2$ 个未知数的 $2n+2$ 阶方程, 可以直接解方程

但是, 本节我们仍然希望通过类似于Lagrange插值和Newton插值类似的思路来构造

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

按照Lagrange插值一样构造

$$H_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^n \left[f(x_i) \alpha_i(x) + f'(x_i) \beta_i(x) \right]$$

令一系列 $2n+1$ 次多项式 $\alpha_i(x), \beta_i(x), i = 0, 1, \dots, n$, 满足

$$\begin{cases} \alpha_i(x_j) = 0, j = 0, 1, \dots, n, j \neq i \\ \alpha_i(x_i) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_i'(x_j) = 0, j = 0, 1, \dots, n, j \neq i \\ \beta_i'(x_i) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_i'(x_j) = 0 \\ \beta_i(x_j) = 0 \end{cases}, j = 0, 1, \dots, n$$

可以检验, 该函数在所有插值节点上满足插值条件

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

回忆一下Lagrange插值基函数

$$l_i(x) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

n次多项式!

$$\text{令: } \alpha_i(x) = (a_i x + b_i) l_i^2(x) \quad \mathbf{2n+1次多项式!}$$

根据插值条件

$$(1) \quad \alpha_i(x_i) = (a_i x_i + b_i) l_i^2(x_i) = a_i x_i + b_i = 1$$

$$(2) \quad \alpha_i'(x_i) = [(a_i x_i + b_i) l_i^2(x_i)]' = a_i l_i^2(x_i) + 2(a_i x_i + b_i) l_i'(x_i) = a_i + 2l_i'(x_i) = 0$$

关键在确定这个值!

基函数构造法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

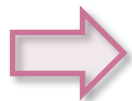
Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$



$$l_i'(x) = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \left(\prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j) \right)' = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \sum_{j=0, j \neq i}^n \prod_{k=0, k \neq j, k \neq i}^n (x - x_k)$$



$$l_i'(x_i) = \frac{1}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} \sum_{j=0, j \neq i}^n \prod_{k=0, k \neq j, k \neq i}^n (x_i - x_k) = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{\prod_{k=0, k \neq j, k \neq i}^n (x_i - x_k)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (x_i - x_j)} = \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{(x_i - x_j)}$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

由此可得

$$a_i = -2l_i'(x_i) = -2 \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{(x_i - x_j)}$$

$$b_i = 1 - a_i x_i = 1 + 2x_i \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{(x_i - x_j)}$$

$$\alpha_i(x) = (a_i x + b_i) l_i^2(x) = \left[1 - 2(x - x_i) \sum_{j=0, j \neq i}^n \frac{1}{(x_i - x_j)} \right] l_i^2(x)$$

用同样的方法可以得到

$$\beta_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x) \Rightarrow \begin{cases} \beta_i(x_i) = 0 \\ \beta_i'(x_i) = 2(x - x_i) l_i'(x) \big|_{x_i} + l_i^2(x_i) = 1 \end{cases}$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

定理6.3.1 (教材编号)

设 $f \in C^1[a, b]$, 相异的节点 $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, 则存在唯一的多项式 $H_{2n+1} \in P_{2n+1}[a, b]$ 满足如上的插值条件

①存在性

构造过程已经给出

②唯一性

假定有另一个多项式 $\tilde{H}_{2n+1}(x)$ 也满足, 则

$$p_{2n+1}(x_i) = H_{2n+1}(x_i) - \tilde{H}_{2n+1}(x_i) = 0 \text{ 有 } n+1 \text{ 个根}$$

$$p'_{2n+1}(x_i) = H'_{2n+1}(x_i) - \tilde{H}'_{2n+1}(x_i) = 0 \text{ 这 } n+1 \text{ 个根都是2重根!}$$

所以有 $2n+2$ 个根, 和 $2n+1$ 次多项式矛盾!

三次Hermite插值多项式



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

实际中，**两点三次**（最高不超过）Hermite插值多项式是应用**最为广泛**的，取

x	$f(x)$	$f'(x)$
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$

$$\begin{cases} \alpha_0(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 \\ \alpha_1(x) = \left(1 + 2 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta_0(x) = (x - x_0) \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 \\ \beta_1(x) = (x - x_1) \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 \end{cases}$$

$$H_3(x) = f(x_0)\alpha_0(x) + f(x_1)\alpha_1(x) + f'(x_0)\beta_0(x) + f'(x_1)\beta_1(x)$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式

H插值余项

重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

定理6.3.2 (教材编号)

设 $f \in C^{2n+2}[a, b]$, 相异的节点 $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, $H_{2n+1} \in P_{2n+1}[a, b]$ 为满足插值条件的Hermite多项式, 那么对于任意的 $x \in [a, b]$, 存在 $\xi = \xi(x) \in (a, b)$, 使得

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \omega_{n+1}^2(x)$$

其证明完全可以仿照Lagrange插值法的余项, 此处略
特别的, 对于三次Hermite插值多项式有

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} (x - x_0)^2 (x - x_1)^2$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

定理6.3.3 (教材编号)

设 $f \in C^n[a, b]$, 相异的节点 $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, 则 $f[x_0, x_1, \dots, x_n]$ 是连续函数

如果以上的节点有重复呢?

先看一阶, 在 x_0 处有重复, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$

由此可以定义重节点 x_0 处的一阶均差

$$f[x_0, x_0] = \lim_{x \rightarrow x_0} f[x_0, x] = f'(x_0) \quad \text{重要!}$$

由此再往下推: $f[x_0, x_0, x_0] = \frac{1}{2!} f''(x_0) \dots \dots f[\underbrace{x_0, x_0, \dots, x_0}_{n+1 \text{ 个}}] = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$

均差性质3

—

此处即教材定理6.3.4

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

定理6.3.5 (教材编号)

设 $f \in C^{n+2}[a, b]$, 相异的节点 $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ $x \in [a, b]$ 则

$$\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = f[x_0, x_1, \dots, x_n, \underline{x}, x]$$

$$\frac{d}{dx} f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x+h] - f[x_0, x_1, \dots, x_n, x]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x_0, x_1, \dots, x_n, x+h] - f[x, x_0, x_1, \dots, x_n]}{x+h-x}$$

均差性质2

节点序列 $[x, x_0, x_1, \dots, x_n, x+h]$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f[x, x_0, x_1, \dots, x_n, x+h] = f[x, x_0, x_1, \dots, x_n, x] = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x, x]$$

再次使用均差性质2

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

考虑 $f(x)$ 有 $2n+2$ 个相异的节点 $z_0, z_1, \dots, z_{2n+1} \in [a, b]$, 可以得到一个 $2n+1$ 插值多项式

$$N_{2n+1}(x) = f(z_0) + f[z_0, z_1](x - z_0) + f[z_0, z_1, z_2](x - z_0)(x - z_1) + \dots + f[z_0, z_1, \dots, z_{2n+1}]\omega_{2n+1}(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = f[z_0, z_1, \dots, z_{2n+1}, x]\omega_{2n+2}(x)$$

如果将节点两两合并成一个重节点: $z_{2i}, z_{2i+1} \rightarrow x_i, i = 0, 1, \dots, n$

$$N_{2n+1}(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)(x - x_0) + \dots + f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n](x - x_n)\omega_n^2(x)$$

$$R_{2n+1}(x) = f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x]\omega_{n+1}^2(x)$$

Hermite插值牛顿形式



清华大学 深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$f(x) = N_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$$

在节点处 $R_{2n+1}(x_i) = f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x] \omega_{n+1}^2(x_i) \Big|_{x_i} = 0 \Rightarrow f(x_i) = N_{2n+1}(x_i)$

$$f'(x) = N'_{2n+1}(x) + R'_{2n+1}(x)$$

$$R'_{2n+1}(x) = \frac{d}{dx} \left\{ f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x] \omega_{n+1}^2(x) \right\} = f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x, x] \omega_{n+1}^2(x)$$

$$+ 2 f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n, x_n, x] \omega_{n+1}(x) \frac{d\omega_{n+1}(x)}{dx}$$

显然在节点处 $R'_{2n+1}(x_i) = 0 \Rightarrow f'(x_i) = N'_{2n+1}(x_i)$

满足一半插值条件

满足另一半插值条件

$$N_{2n+1}(x) = H_{2n+1}(x)$$

存在且唯一!

Hermite插值牛顿形式



概论

插值问题

存在唯一性定理

准备知识

Lagrange插值

线性插值

抛物线插值

n次插值多项式

L插值余项

Newton插值

均差

Newton插值公式

N插值余项

Hermite插值

基函数构造法

三次插值多项式

H插值余项

重节点均差

H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

三次样条插值

三次样条函数

样条插值函数

编程实践

x	$f(x)$	一阶	二阶	三阶
x_0	$f(x_0)$			
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$	
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$

$$H_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1)$$

$$R_3(x) = f[x_0, x_0, x_1, x_1, x](x - x_0)^2(x - x_1)^2 = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \omega_2^2(x)$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

5.1 概论及背景知识

5.2 Lagrange插值多项式

5.3 Newton插值多项式

5.4 Hermite插值

5.5 分段低次插值方法

5.6 三次样条插值函数

5.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

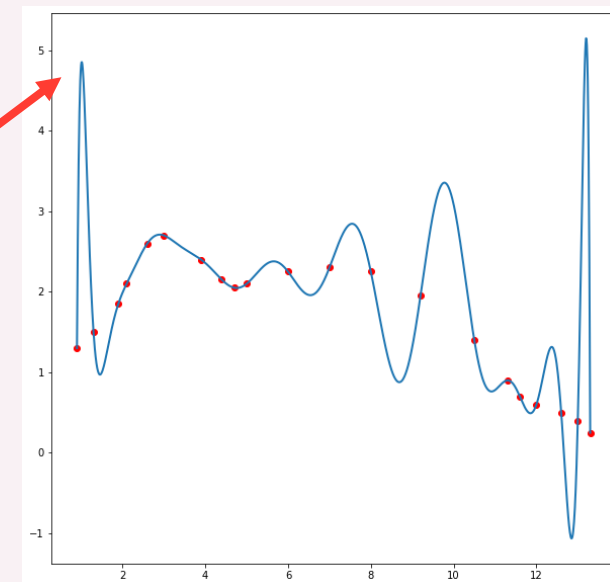
编程实践

考虑Lagrange插值多项式的余项：

当阶数增加的时候是不是 $R_n(x)$ 一定逐渐减小？

如之前一例，通常我们检验：

即可框定 $R_n(x)$ 的上界，并且通常会随阶数增加而减少；但是，也有一些函数在某些区域无法满足这个条件，被称为**Runge现象**：非节点的误差变得很大



解决方案之一：对很多节点进行分段，每段都用低阶多项式插值

分段插值—分段线性插值



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

设在区间 $[a, b]$ 上取定 $n+1$ 个节点: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, 节点上函数值 $f(x_k)$

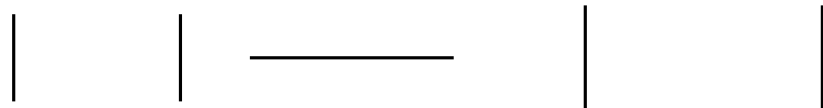
插值函数: $\varphi(x) \in C[a, b]$, 满足所有插值条件, 且在 $[x_k, x_{k+1}]$ 区间内有

$$\varphi(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} f(x_k) + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f(x_{k+1}), k = 0, 1, \dots, n-1$$

称为**分段线性**插值多项式

对于每一段 $[x_k, x_{k+1}]$, 记 $h_{k+1} = x_{k+1} - x_k$, 根据Lagrange插值多项式的余项推论2

$$\left| \frac{R}{x \in [x_k, x_{k+1}]} \right| \leq \frac{h_{k+1}^2}{8} \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f''(x)|$$



分段插值—分段线性插值



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

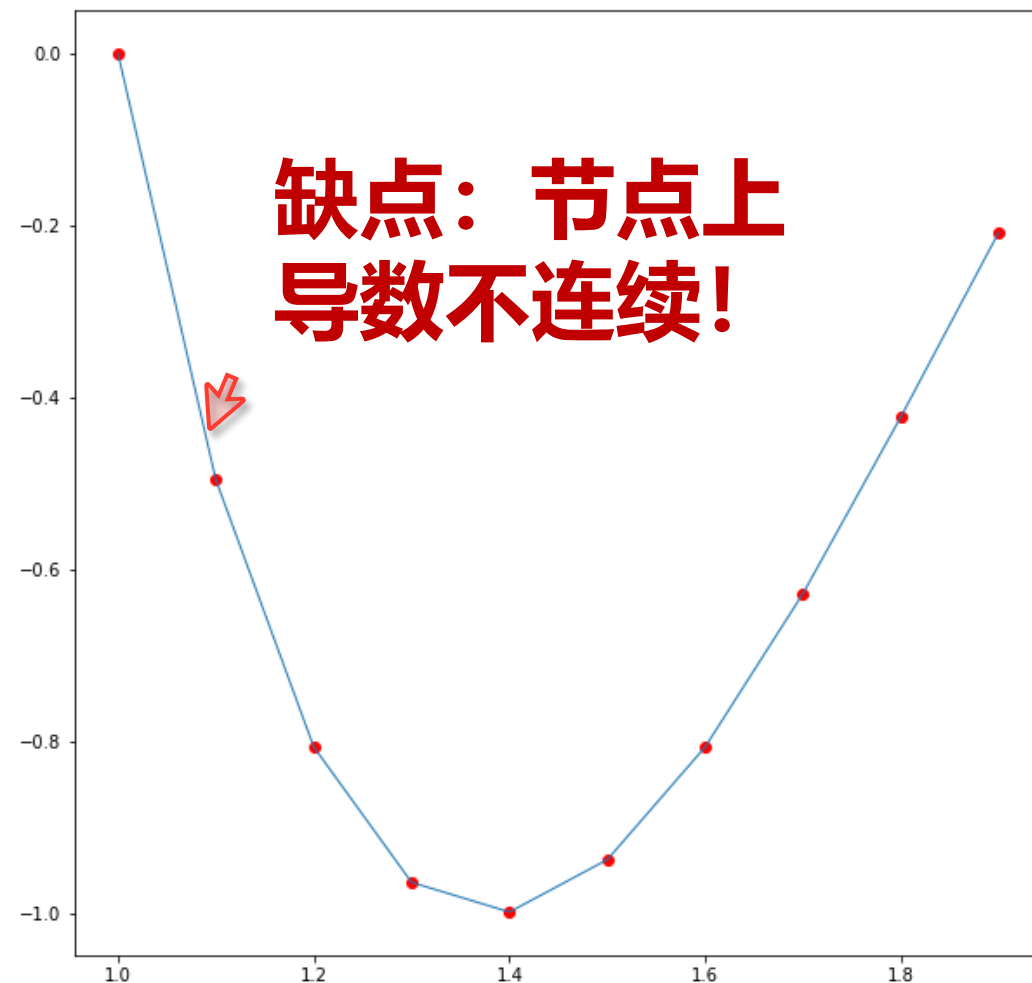
编程实践

定理6.4.1 (教材编号)

若 $f \in C^2[a, b]$, 则如上分段线性插值多项式的余项满足

$$\|R(x)\|_{\infty} \leq \frac{\|h\|_{\infty}^2}{8} \|f''\|_{\infty}$$

由此可以看出当数据点足够密, 即 h_k 足够小时, φ 可以充分逼近 f , 这也就是当数据的足够时, plot函数看起来就是原函数的原因



分段插值—分段三次Hermite插值



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象

分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

同样对每一小段 $[x_k, x_{k+1}]$, 增加一阶导数作为插值条件, 构成三次Hermite插值多项式

$$\varphi(x_k) = f(x_k), \varphi(x_{k+1}) = f(x_{k+1}), \varphi'(x_k) = f'(x_k), \varphi'(x_{k+1}) = f'(x_{k+1})$$

$$\varphi(x) = f(x_k) + f[x_k, x_k](x - x_k) + f[x_k, x_k, x_{k+1}](x - x_k)^2$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$+ f[x_k, x_k, x_{k+1}, x_{k+1}](x - x_k)^2(x - x_{k+1})$$

同样可以得到

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

定理6.4.2 (教材编号)

若 $f \in C^4[a, b]$, 则如上分段三次Hermite插值多项式的余项满足

$$\|R(x)\|_{\infty} \leq \frac{\|h\|_{\infty}^4}{384} \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

5.1 概论及背景知识

5.2 Lagrange插值多项式

5.3 Newton插值多项式

5.4 Hermite插值

5.5 分段低次插值方法

5.6 三次样条插值函数

5.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

插值问题的几个实际需求 and 困难

①希望一阶导数连续 (**需求**) , 但是又不想给出所有节点的一阶导数 (**困难**)

②更加光滑, 比如二阶导数也连续 (**需求**)

定义6.5.1 (教材编号)

设在区间 $[a, b]$ 上的一个剖分: $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$
函数 $s(x)$ 满足

$$(1) s \in C^2[a, b]$$

(2) $s(x)$ 在 Δ 的每一个区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上都是三次多项式

则称 $s(x)$ 为关于剖分 Δ 的一个 **三次样条 (spline) 函数**

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

如果以 $s(x)$ 作为 Δ 上的函数 $f(x)$ 的插值函数, 则

$$s(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$$

$n+1$ 个条件

在每一个区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上, $s(x)$ 都是一个三次多项式

$$s_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k$$

$x \in [x_k, x_{k+1}]$

每个区间4个待定参数,
一共 **$4n$ 个参数**

节点连续条件

$$\begin{cases} s(x_i^-) = s(x_i^+) \\ s'(x_i^-) = s'(x_i^+), i = 1, 2, \dots, n-1 \\ s''(x_i^-) = s''(x_i^+) \end{cases}$$

$3n-3$ 个条件

样条插值函数—边界条件



清华大学 深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

刚才一共有 $4n-2$ 个条件，但是有 $4n$ 个待定参数，因而需要更多的条件

① **I型边界条件** 两个端点给出一阶导数

$$s'(x_0) = f'(x_0), s'(x_n) = f'(x_n)$$

② **II型边界条件** 两个端点给出二阶导数

$$s''(x_0) = f''(x_0), s''(x_n) = f''(x_n)$$

③ **自然边界条件**

$$s''(x_0) = 0, s''(x_n) = 0$$

④ **周期延拓**

$$s(x_0^+) = s(x_n^-), s'(x_0^+) = s'(x_n^-), s''(x_0^+) = s''(x_n^-)$$

样条插值函数—计算方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

直接用解方程的方法求解上述系数是比较麻烦的，因而需要寻找合适的求解方法

思路：在某一个区间内 $s(x)$ 是一个三次多项式，则 $s''(x)$ 是一个**线性函数**

记所有节点上 $M_j = s''(x_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$; $h_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$

这个值并不知道！

对 $s''(x)$ 用Lagrange插值

$$s''(x)_{x \in [x_j, x_{j+1}]} = M_j \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{x_{j+1} - x_j} = M_j \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + M_{j+1} \frac{x - x_j}{h_j}$$

对上式积分两次 $s(x)_{x \in [x_j, x_{j+1}]} = \frac{M_j}{6h_j} (x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_j} (x - x_j)^3 + c_1 x + c_2$

样条插值函数—计算方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$s(x)_{x \in [x_j, x_{j+1}]} = \frac{M_j}{6h_j} (x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_j} (x - x_j)^3 + c_1 x + c_2$$

将 $s(x_j) = f(x_j), s(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$ 代入, 可以消去两个常数

$$f(x_j) = s(x_j) = \frac{M_j h_j^2}{6} + c_1 x_j + c_2$$

$$f(x_{j+1}) = s(x_{j+1}) = \frac{M_{j+1} h_j^2}{6} + c_1 x_{j+1} + c_2$$

$$c_1 = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_j} - \frac{(M_{j+1} - M_j)h_j}{6} = \frac{1}{h_j} \left[\left(f(x_{j+1}) - \frac{M_{j+1}}{6} h_j^2 \right) - \left(f(x_j) - \frac{M_j}{6} h_j^2 \right) \right]$$

样条插值函数—计算方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$c_2 = \frac{1}{h_j} \left[x_{j+1} \left(f(x_j) - \frac{M_j}{6} h_j^2 \right) - x_j \left(f(x_{j+1}) - \frac{M_{j+1}}{6} h_j^2 \right) \right]$$

$$s(x)_{x \in [x_j, x_{j+1}]} = \frac{M_j}{6h_j} (x_{j+1} - x)^3 + \frac{M_{j+1}}{6h_j} (x - x_j)^3 + \left[f(x_j) - \frac{M_j h_j^2}{6} \right] \frac{x_{j+1} - x}{h_j} + \left[f(x_{j+1}) - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6} \right] \frac{x - x_j}{h_j}$$

上式中还留有 M_j 是未知的, 利用条件 $s'(x_j^-) = s'(x_j^+)$

$$s'(x)_{x \in [x_j, x_{j+1}]} = -\frac{M_j}{2h_j} (x_{j+1} - x)^2 + \cancel{\frac{M_{j+1}}{2h_j} (x - x_j)^2} + \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{h_j} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_j$$

$$\Rightarrow s'(x_j^+) = \lim_{x \rightarrow x_j} s'(x)_{x \in [x_j, x_{j+1}]} = -M_j \frac{h_j}{2} + \underbrace{\frac{1}{h_j} [f(x_{j+1}) - f(x_j)]}_{f[x_j, x_{j+1}]} - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_j$$

样条插值函数—计算方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

往前推一个区间到 $[x_{j-1}, x_j]$

$$s'(x)_{x \in [x_{j-1}, x_j]} = -\frac{M_{j-1}}{2h_{j-1}}(x_j - x)^2 + \frac{M_j}{2h_{j-1}}(x - x_{j-1})^2 + \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h_{j-1}} - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_j$$

$$\Rightarrow s'(x_j^-) = \lim_{x \rightarrow x_j^-} s'(x)_{x \in [x_{j-1}, x_j]} = M_j \frac{h_{j-1}}{2} + \frac{1}{h_{j-1}} [f(x_j) - f(x_{j-1})] - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_{j-1}$$
$$f[x_{j-1}, x_j]$$

利用条件: $s'(x_j^-) = s'(x_j^+)$

$$-M_j \frac{h_j}{2} + f[x_{j+1}, x_j] - \frac{M_{j+1} - M_j}{6}h_j = M_j \frac{h_{j-1}}{2} + f[x_{j-1}, x_j] - \frac{M_j - M_{j-1}}{6}h_{j-1}$$

样条插值函数—计算方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$-M_j \frac{h_j}{2} + f[x_{j+1}, x_j] - \frac{M_{j+1} - M_j}{6} h_j = M_j \frac{h_{j-1}}{2} + f[x_{j-1}, x_j] - \frac{M_j - M_{j-1}}{6} h_{j-1}$$

$$h_{j-1}M_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)M_j + h_jM_{j+1} = 6 \left(f[x_{j+1}, x_j] - f[x_j, x_{j-1}] \right) = x_{j+1} - x_{j-1} f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$$

$$\mu_j = \frac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \lambda_j = 1 - \mu_j = \frac{h_j}{h_{j-1} + h_j}, d_j = 6 f[x_{j-1}, x_j, x_{j+1}]$$

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j$$

样条插值函数—计算方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j$$

j可以从1取至n-1, 但是M有n+1个未知数

考虑边界两个点, 当我们采用边界条件II时

$$M_0 = f''(x_0) \quad \mu_1 M_0 + 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1$$

$$\Rightarrow 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 - \mu_1 M_0$$

$$M_n = f''(x_n) \quad \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} + \lambda_{n-1} M_n = d_n$$

$$\Rightarrow \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_n - \lambda_{n-1} M_n$$

n-1个方程, n-1个未知数!



似曾相识的感觉??

样条插值函数—计算方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \quad 2M_1 + \lambda_1 M_2 = d_1 - \mu_1 M_0 \quad \mu_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} = d_n - \lambda_{n-1} M_n$$

未知向量: $\vec{M} = (M_1, M_2, \dots, M_{n-1})^T$

已知向量: $\vec{d} = (d_1 - \mu_1 M_0, d_2, \dots, d_{n-2}, d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n)^T$

$$A\vec{M} = \vec{d}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} M_n \end{bmatrix}$$

样条插值函数—计算方法



清华大学 深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j$$

当我们采用边界条件I时

$$s'(x_0^+) = -M_0 \frac{h_0}{2} + \frac{1}{h_0} [f(x_1) - f(x_0)] - \frac{M_1 - M_0}{6} h_0 = f'(x_0)$$

$$\Rightarrow 2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} (f[x_0, x_1] - f'(x_0)) = 6f[x_0, x_0, x_1]$$

同理有 $M_{n-1} + 2M_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n]$

扩充成n+1个方程，n+1个未知数

样条插值函数—计算方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第五章

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = d_j \quad 2M_0 + M_1 = 6f[x_0, x_0, x_1] \quad M_{n-1} + 2M_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n]$$

未知向量: $\vec{M} = (M_0, M_1, \dots, M_n)^T_{n+1}$

已知向量: $\vec{d} = (d_0, d_1, \dots, d_n)^T_{n+1}$

$$A\vec{M} = \vec{d}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

$$d_0 = 6f[x_0, x_0, x_1]$$

$$d_i = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$d_n = 6f[x_{n-1}, x_n, x_n]$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

定理6.5.1 (教材编号)

若 $f \in C^4[a, b]$, 如果以 $s(x)$ 作为 Δ 上的函数 $f(x)$ 的插值函数, 并且采用I型边界条件的三次样条函数, 则有

$$\|f(x) - s(x)\|_{\infty} \leq \frac{5\|h\|_{\infty}^4}{384} \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

说明了当数据点足够密, 即 $h \rightarrow 0$ 时, 三次样条插值函数 $s(x)$ 一致收敛到被插值函数 $f(x)$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

5.1 概论及背景知识

5.2 Lagrange插值多项式

5.3 Newton插值多项式

5.4 Hermite插值

5.5 分段低次插值方法

5.6 三次样条插值函数

5.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ Polynomial类修改

```
public static Polynomial operator -(Polynomial p1, Polynomial p2)
{
    Polynomial p;
    if (p1.Degree > p2.Degree)
        p = p1.Copy();
    else
        p = p2.Copy();
    for (int i = 0; i <= Math.Min(p1.Degree, p2.Degree); i++)
        p[i] = p1[i] - p2[i];
    return p;
}
```

修正了多项式类的减法，
这段代码从加法中复制，
导致出现了bug

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & & \end{bmatrix}$$

```
Polynomial p = new Polynomial(0, 1); // p=x
UnaryFunction fD = p.ToFunction();
UnaryFunction fS = p.AsFunction;
p[1] = 2; // p=2x
Console.WriteLine(fD(1) + " " + fS(1));
```

1 2

添加了**double AsFunction(double x)**
方法，该方法会随多项式的变化而
动态变化。ToFunction方法拷贝了
系数数组，返回的函数不会随多项
式变化，注意区分它们

“深拷贝”与“浅拷贝”

根据拷贝的两个对象是否存在“公用”的部分来判断。
简单来说，就是将A复制给B后，如果修改B会导致
A发生同样的变化，就是浅拷贝；否则，对B的修改
不会反映到A中，是深拷贝。

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ Newton插值的实现

```
public static Polynomial GenPolynomial(Vector xs, Vector ys)
{
    double[,] diff = new double[xs.Length, xs.Length];
    ys.CopyTo(diff);
    for (int i = 1; i < xs.Length; i++)
    {
        for (int j = 0; j < xs.Length - i; j++)
        {
            diff[i, j] = (diff[i - 1, j + 1] - diff[i - 1, j]) / (xs[j + i] - xs[j]);
        }
    }
    Polynomial p = new Polynomial(0);
    Polynomial ans = new Polynomial(ys[0]);
    for (int i = 0; i < xs.Length - 1; i++)
    {
        p *= new Polynomial(-xs[i], 1);
        ans += diff[i + 1, 0] * p;
    }
    return ans;
}
```

0	1	2	3
0,1	1,2	2,3	—
0,1,2	1,2,3	—	—
0,1,2,3	—	—	—

$$d[i, j] = f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+i}]$$

$$\begin{aligned} d[2, k] &= f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] \\ &= \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} \\ &= \frac{d[1, k+1] - d[1, k]}{x_{k+2} - x_k} \end{aligned}$$

$$d[i, j] = \frac{d[i-1, j+1] - d[i-1, j]}{x_{k+i} - x_k}$$

仅用到原来的第一列!

✓ Newton插值的实现

```
public static Polynomial GenPolynomial(Vector xs, Vector ys)
```

```
{
    double[,] diff = new double[xs.Length, xs.Length];
    ys.CopyTo(diff);
    for (int i = 1; i < xs.Length; i++)
    {
        for (int j = 0; j < xs.Length - i; j++)
        {
            diff[i, j] = (diff[i - 1, j + 1] - diff[i - 1, j]) / (xs[j + i] - xs[j]);
        }
    }
    Polynomial p = new Polynomial(0);
    Polynomial ans = new Polynomial(ys[0]);
    for (int i = 0; i < xs.Length - 1; i++)
    {
        p *= new Polynomial(-xs[i], 1);
        ans += diff[i + 1, 0] * p;
    }
    return ans;
}
```

-1	0	1	2	3
-1,0	0,1	1,2	2,3	-
-1,0,1	0,1,2	1,2,3	-	-
-1,0,1,2	0,1,2,3	-	-	-
-1,0,1,2,3	-	-	-	-

$$\begin{aligned}
 N_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\
 &\quad + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
 &\quad + \dots \\
 &= d[0,0] + d[1,0](x - x_0) \\
 &\quad + d[2,0](x - x_0)(x - x_1) + \dots
 \end{aligned}$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ 三次样条插值的实现

```
public static Polynomial[] GenPiecewise(Vector xs, Vector ys, double M0 = 0, double Mn = 0)
{
```

```
    int n = xs.Length;
```

```
    Vector h = xs.SubVector(1, n) - xs.SubVector(0, n - 1);
```

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

```
    Vector diff2 = ys.Copy();
```

```
    for (int i = 0; i < n - 1; i++)
```

```
        diff2[i] = (diff2[i + 1] - diff2[i]) / (xs[i + 1] - xs[i]);
```

```
    for (int i = 0; i < n - 2; i++)
```

```
        diff2[i] = (diff2[i + 1] - diff2[i]) / (xs[i + 2] - xs[i]);
```

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$$

$$d_i = 6f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$$

```
    Vector M = new Vector(n);
```

```
    M[0] = M0;
```

```
    M[n - 1] = Mn;
```

M_0 与 M_{n-1} 由函数参数给出，余下n-2个二阶导数待求
注意此处的变量n指的是插值节点个数

```
    Vector mu = new Vector(n - 2);
```

```
    for (int i = 0; i < mu.Length; i++)
```

```
        mu[i] = h[i] / (h[i] + h[i + 1]);
```

$$\mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}$$

```
    Vector lmd = mu.Mapping(x => 1 - x);
```

```
    // .....
```

$$\lambda_i = 1 - \mu_i$$

为便于转化成代码，所有下标均转化为从0开始

```
}
```

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ 三次样条插值的实现

```
public static Polynomial[] GenPiecewise(Vector xs, Vector ys, double M0 = 0, double Mn = 0)
{
```

```
// .....
```

```
Vector diag = new Vector(n - 2, true) * 2;
Vector upDiag = lmd.SubVector(0, lmd.Length - 1);
Vector lowDiag = mu.SubVector(1, mu.Length);
```

构造系数角矩阵的三条斜线

①对角线全为2

②上次对角线为 λ 的前 $n - 3$ 项

③下次对角线为 μ 的后 $n - 3$ 项

```
Vector b = 6 * diff2.SubVector(0, n - 2);
b[0] -= mu[0] * M[0];
b[b.Length - 1] -= lmd[lmd.Length - 1] * M[M.Length - 1];
```

构造右端向量，先取为

$b_i = d_i = 6f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$

然后修改第一项和最后一项

```
Vector M2 = Thomas.Solve(lowDiag, diag, upDiag, b);
M2.CopyTo(M, 1);
```

```
// .....
```

```
}
```

调用追赶法（Thomas方法）求解；采用三斜线形式表示矩阵，减少空间占用

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-4} & 2 & \lambda_{n-4} \\ & & & \mu_{n-3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 - \mu_0 M_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-3} \\ d_{n-2} - \lambda_{n-3} M_{n-1} \end{bmatrix}$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

✓ 三次样条插值的实现

```
public static Polynomial[] GenPiecewise(Vector xs, Vector ys, double M0 = 0, double Mn = 0)
{
    // .....
    Polynomial[] ans = new Polynomial[n - 1];
    for (int i = 0; i < ans.Length; i++)
    {
        Polynomial p1 = new Polynomial(xs[i], -1), p13 = p1 * p1 * p1,
        p2 = new Polynomial(xs[i + 1], -1), p23 = p2 * p2 * p2;
        ans[i] = (M[i] * p23 - M[i + 1] * p13) / 6
        + (ys[i] - M[i] * h[i] * h[i] / 6) * p2 -
        (ys[i + 1] - M[i + 1] * h[i] * h[i] / 6) * p1;
        ans[i] /= h[i];
    }

    return ans;
}
```

返回n-1个三次多项式,
相当于分段函数在n-1
个区间内的表达式

$$s(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} - M_{i+1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + \left(f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} - \left(f(x_{i+1}) - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_i}$$

$$= \frac{1}{h_i} \left[\frac{M_i (x_{i+1} - x)^3 - M_{i+1} (x_i - x)^3}{6} + \left(f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6} \right) (x_{i+1} - x) - \left(f(x_{i+1}) - \frac{M_{i+1} h_i^2}{6} \right) (x_i - x) \right]$$

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

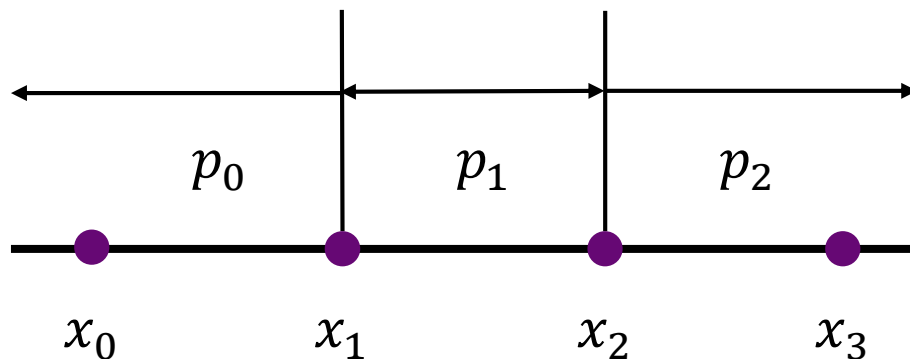
✓ 三次样条插值的实现

```
public static UnaryFunction PiecewiseAsFunc(Vector xs, Polynomial[] piecewise)
{
    return x =>
    {
        int dex = 0;
        while (dex + 1 < xs.Length - 1 && x >= xs[dex + 1])
        {
            dex++;
        }
        return piecewise[dex].AsFunction(x);
    };
}
```

通过边界和分段多项式生成分段函数

计算输入的x值对应的多项式索引，假设插值节点x值递增

用索引为dex的多项式计算对应的y值并返回



概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

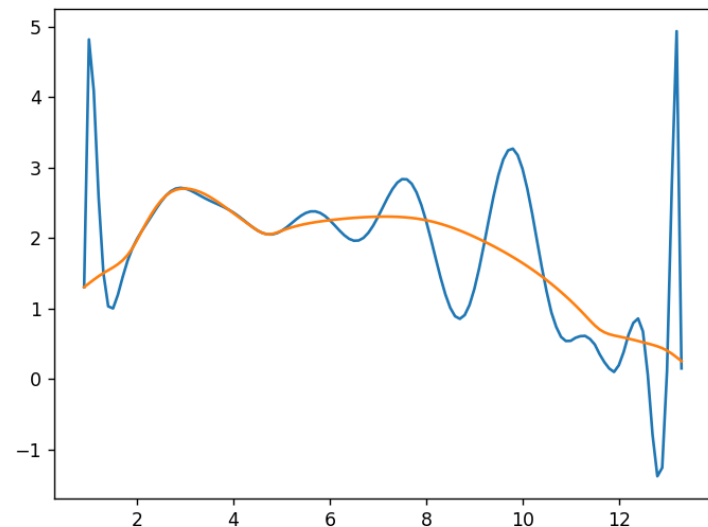
✓ 三次样条与Lagrange对比

```
public static void Sample()
{
    Vector xs = new Vector(...);
    Vector ys = new Vector(...);

    var pw = CubicSpline.GenPiecewise(xs, ys);
    var f = CubicSpline.PiecewiseAsFunc(xs, pw);

    var testXs = Vector.Range(125).Mapping(x => x / 10 + 0.9);
    var testYs = testXs.Mapping(f);

    Console.WriteLine(testXs);
    Console.WriteLine(testYs);
}
```



3. 表 6.3 给出了飞行中鸭子的上部形状的节点数据. 试用三次样条插值函数(自然边界条件)和 20 次 Lagrange 插值多项式对数据进行插值. 用图示出给定的数据, 以及 $s(x)$ 和 $L_{20}(x)$.

表 6.3

x	0.9	1.3	1.9	2.1	2.6	3.0	3.9	4.4	4.7
$y=f(x)$	1.3	1.5	1.85	2.1	2.6	2.7	2.4	2.15	2.05
x	5.0	6.0	7.0	8.0	9.2	10.5	11.3	11.6	12.0
$y=f(x)$	2.1	2.25	2.3	2.25	1.95	1.4	0.9	0.7	0.6
x	12.6	13.0	13.3						
$y=f(x)$	0.5	0.4	0.25						

概论

插值问题
存在唯一性定理
准备知识

Lagrange插值

线性插值
抛物线插值
n次插值多项式
L插值余项

Newton插值

均差
Newton插值公式
N插值余项

Hermite插值

基函数构造法
三次插值多项式
H插值余项
重节点均差
H插值牛顿形式

分段低次插值

Runge现象
分段插值

三次样条插值

三次样条函数
样条插值函数

编程实践

- 掌握**插值方法**和**余项**概念
- 理解**存在唯一性证明**的思路和计算过程
- 掌握**Lagrange插值、Newton插值、Hermite插值**
牛顿形式的方法和计算过程
- 理解**Hermite插值、分段低次插值**和**三次样条插值**的
思路

作业

教材P189-9、P189-12、*P190-2（绘图不限软件）