



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School

工程硕士数学

第六章 函数逼近

胡振中 副教授

海洋大楼 702-3, 15999640239 (微信同号)

邮箱: huzhenzhong@tsinghua.edu.cn

个人网站: <http://www.huzhenzhong.net>

概论

研究的问题
准备知识
函数逼近问题

正交多项式

定义
性质
Legendre
Chebyshev
其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算
正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算
正交多项式方法

编程实践

6.1 概论

6.2 正交多项式

6.3 最佳平方逼近

6.4 最小二乘法

6.5 编程实践

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

仍然是上一章的问题

自变量 x_i

样品浓度(ppb)	100	200	500	1000	2000	5000
信号强度	1450	3550	6100	12200	24400	49800

测量值 $f(x_i)$

为了探索某一实验现象的规律，我们需要得到关系： $f(x)$

思路1

如果 $f(x)$ 是一个难以描述的复杂函数，我们能否找一个或者一系列简单函数 $\varphi(x)$ 来近似，且满足在已知的实验点 x_i 上， $\varphi(x_i) = f(x_i)$

思路2

不严格要求 $\varphi(x_i) = f(x_i)$ ；而是在全局范围内找到一个近似函数 $\tilde{f}(x)$

函数逼近（函数拟合）

研究的问题—Galileo斜坡实验



概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

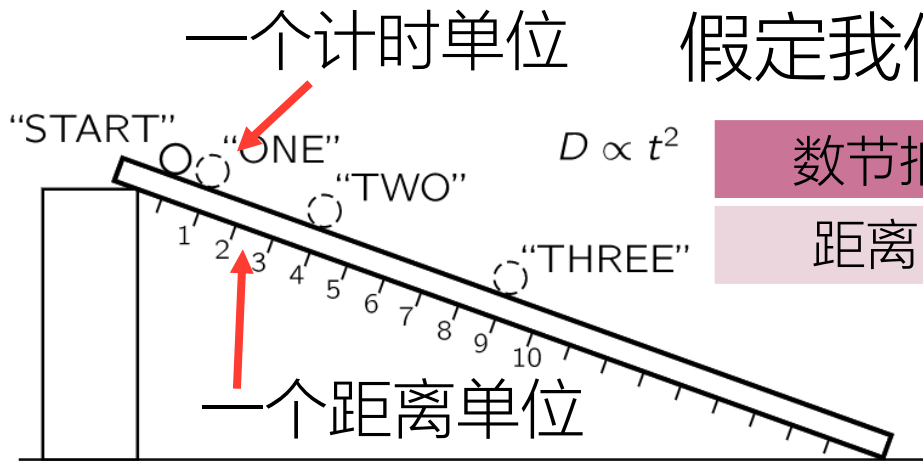


Fig. 5-1. A ball rolls down an inclined track.

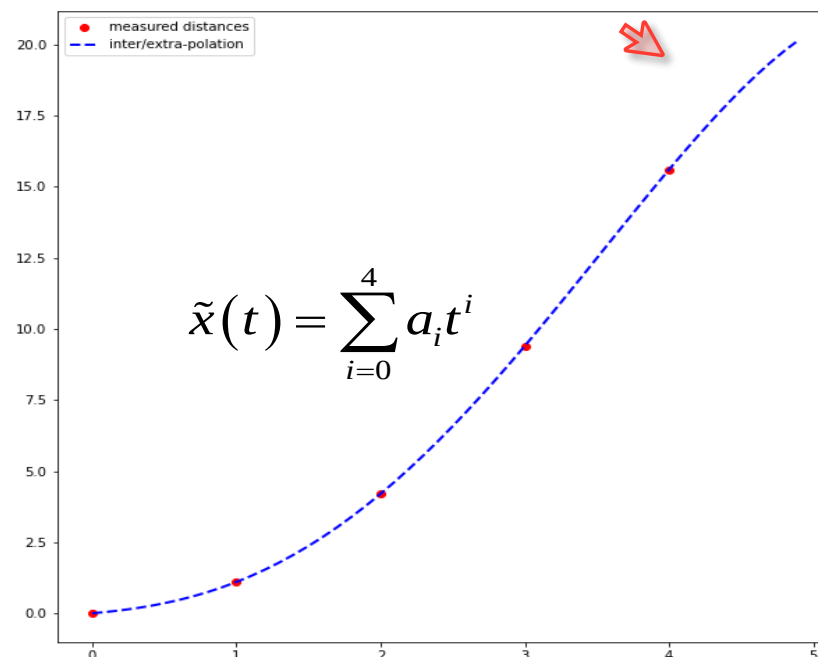
Galileo's first experiments on motion were done by using his pulse to count off equal intervals of time.

from: https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_05.html

假定我们尝试当年的实验获得了如下的数据

数节拍	0	1	2	3	4
距离	0	1.1	4.2	9.4	15.6

外插的预测也是错误的



无法解释其物理意义!

研究的问题—Galileo斜坡实验



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

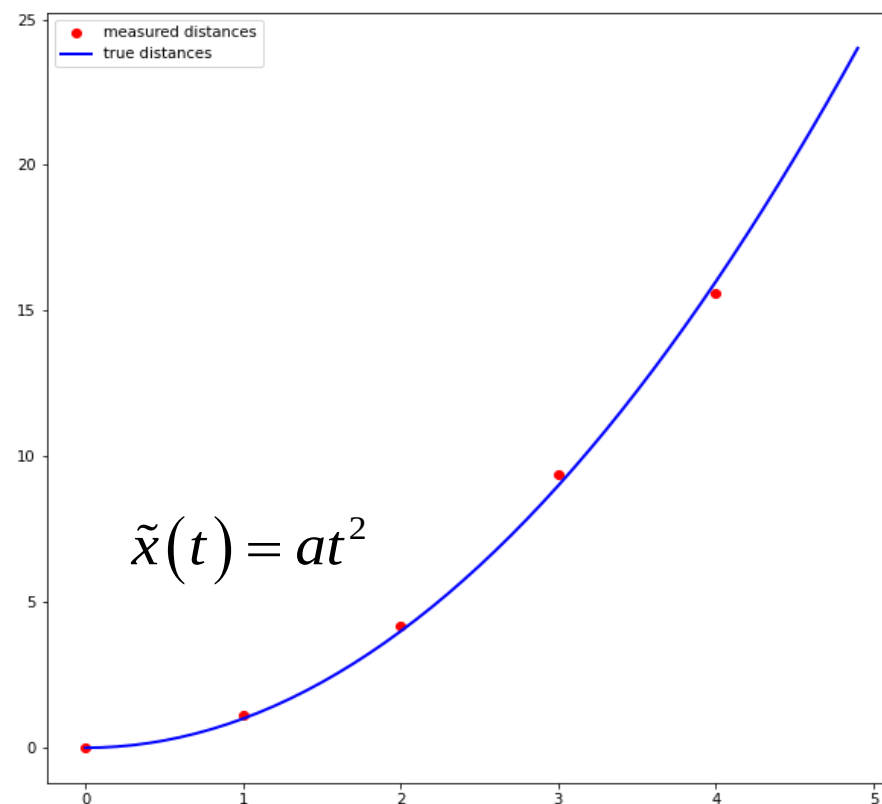
编程实践

事实上，我们无法保证每一个数拍上有关距离的测量是完全准确的，因而接下来需要一些大胆的假设

此时，我们不再保证近似的函数 $\tilde{x}(t)$ 在测量的数据点 $t_0, \dots, t_4$ 上准确的等于测量值 $x(t_i), i = 0, 1, \dots, 4$ ，而是期望近似函数在测量数点上的偏差

$$e_i = |x(t_i) - \tilde{x}(t_i)|, i = 0, 1, \dots, 4$$

达到某种程度的最优，即
函数的逼近/拟合



非常有物理意义！

研究的问题—再讨论插值还是拟合



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

现代科学是建立在实验观测基础上的

- 一方面，仪器无法提供无限准确的测量值
- 另一方面，我们通常需要理论推导一个预期的模型

$$\eta = a \cos(kx - \omega t)$$

线性波波面方程

在一定的误差范围内**拟合**模型，可以获得物理模型的参数估计，预测新的结果！

对于有些数据处理问题，我们可以认为或只能认为采集点是准确的，例如：

- 结构健康监测系统的监测值
- 图像放大、旋转
- 无法导出理论模型，只能观察大致的趋势

插值

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

函数族的线性相关

函数族 $\varphi_i(x) \in C[a, b], i = 0, 1, \dots, n$, 当且仅当一系列系数 $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, n$ 都为0时, 才有 $\sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) \equiv 0, \forall x \in [a, b]$

则称该函数族**线性无关**, 否则称该函数族线性相关

衍生命题

假设 $\varphi_i(x)$ 为 $[a, b]$ 上的 i 次多项式, 则 $\varphi_i(x), i = 0, 1, \dots, n$ 在该区间上线性无关

证明: 令 $p(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x)$ 则若 $p(x) \equiv 0, \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow c_n a_n = 0 \Rightarrow c_n = 0 \Rightarrow c_i = 0, i = 0, 1, \dots, n$$

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

定理7.1.2 (教材编号)

设 $\varphi_j \in P^n, j = 0, 1, \dots, n$ 是一组线性无关的多项式, 那么任意一个多项式 $p \in P^n$ 可以唯一地由 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 的线性组合来表示

衍生命题

$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 是**代数多项式空间** $P^n[a, b]$ 上的一组线性无关的向量

记成: $P^n[a, b] = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 由一组线性无关基向量**张成**

即任意一个n次多项式可由 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 的线性组合**唯一**表示

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 定理

设 $f(x) \in C[a, b]$, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 总存在一个代数多项式 $p(x)$, 使

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

在 $[a, b]$ 上一致成立

存在性!

证明略——Bernstein在1912年构造出多项式

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_k(x), \quad P_k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f, x) = f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致成立

但是收敛太慢, 很少使用!

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

更加一般的，可以用一组 $C[a,b]$ 上线性无关的函数集合 $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^n$ 来逼近 $f(x) \in C[a,b]$

可以记作： $\varphi(x) \in \Phi = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\} \subset C[a,b]$

一组线性无关的函数

也可以记作： $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x)$

一组基向量的线性组合

函数逼近问题

在函数空间 Φ 中，寻找一个元素 $\varphi^*(x) \in \Phi$ ，使得 $f(x) - \varphi^*(x)$ 在某种意义上最小



概论

研究的问题
准备知识
函数逼近问题

正交多项式

定义
性质
Legendre
Chebyshev
其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算
正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算
正交多项式方法

编程实践

6.1 概论

6.2 正交多项式

6.3 最佳平方逼近

6.4 最小二乘法

6.5 编程实践

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

定义7.1.2 (教材编号)

设 $f, g \in C[a, b]$, $\rho(x)$ 为 $[a, b]$ 上的权函数, 若满足

$$(f, g) = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx = 0 \quad \text{则称 } f(x), g(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是正交的}$$

定义7.1.3 (教材编号)

设 $\varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上首项系数不为0的 n 次多项式, 若多项式序列

$$\{\varphi_n(x), n \geq 0\} \text{ 满足 } (\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0, i \neq j \\ A_j, i = j \end{cases}$$

⇒ 多项式序列在 $[a, b]$ 带权函数正交

也称 $\{\varphi_n(x)\}$ 为 $[a, b]$ 上带权函数的 n 次正交多项式族

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

性质1: 正交 $\Rightarrow$ 线性无关

$$\text{构造 } c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = 0$$

两侧同时乘 $\rho(x)\varphi_j(x)$ 并在区间内积分

$$c_0 \int_a^b \rho(x)\varphi_0(x)\varphi_j(x)dx + \dots + c_j \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)dx + \dots + c_n \int_a^b \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_j(x)dx = 0$$

$$\text{由正交性质 } c_j \int_a^b \rho(x)\varphi_j(x)\varphi_j(x)dx = 0 \Rightarrow c_j = 0$$

不为0 $\Rightarrow$ 由 j 的任意性可得线性无关!

推论: 对于任意 $p \in P^n$, 可以分解为正交多项式的线性组合

$$p(x) = \sum_{j=0}^n c_j \varphi_j(x)$$

定理, 教材编号7.1.3

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

性质2: 对任意 $p \in P^{n-1}$

$$(\varphi_n, p) = \int_a^b \rho(x) \varphi_n(x) p(x) dx = 0 \quad \text{定理, 教材编号7.1.4}$$

性质3: $\varphi_n(x)$ 在开区间 (a, b) 内有 n 个不同的零点

先假设 $\varphi_n(x)$ 在开区间内有 m 个根, $x_j, j=1, 2, \dots, m$, 且每个根上都有偶数重根, 记作 $\varphi_n(x) = (x-x_1)^{2k_1} (x-x_2)^{2k_2} \dots (x-x_m)^{2k_m} g(x), g(x_j) \neq 0$

由此可得 $\varphi_n(x)$ 在区间上保号

$$\Rightarrow (\varphi_n, \varphi_0) = \int_a^b \underbrace{\rho(x)}_{>0} \varphi_n(x) \varphi_0(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \varphi_n(x) \equiv 0 \quad \text{矛盾!}$$

$\Rightarrow$ 不可以都是偶数重根!

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

性质3 (续)

再假设有 l 个**奇数**重根, 记作

$$\varphi_n(x) = (x - x_1)^{2k_1-1} \dots (x - x_l)^{2k_l-1} (x - x_{l+1})^{2k_{l+1}} \dots (x - x_m)^{2k_m} g(x), g(x_j) \neq 0$$

令: $q(x) = (x - x_1) \dots (x - x_l)$, 则 $q(x)\varphi_n(x)$ 又回到了偶数重根, 在区间上保号

另一方面如果 $l < n$, $q(x)$ 的次数要低于 $\varphi_n(x)$, 根据性质2, 有

$$(\varphi_n, q) = \int_a^b \rho \varphi_n q dx = 0 \quad \Rightarrow \quad q(x)\varphi_n(x) \equiv 0 \quad \text{再次矛盾}$$

所以必须满足 $l = n$, 刚好有 n 个零点且只能是单重的!

定理, 教材编号7.1.5

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

性质4：递推关系

$$\varphi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\varphi_n(x) - \beta_n(x)\varphi_{n-1}(x), n = 0, 1, \dots$$

$$\text{其中: } \varphi_{-1}(x) = 0 \quad \varphi_0(x) = 1 \quad \varphi_1(x) = x - \int \rho(x)x dx$$

$$\alpha_n = \frac{(x\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)}, n = 0, 1, \dots \quad \beta_n = \frac{(\varphi_n, \varphi_n)}{(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1})}, n = 1, \dots$$

此处没有选择教材定理7.1.6的表达形式，而是采用了《数值分析》一书中的相关表达

Legendre(勒让德)多项式



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

可以用Gram-Schmidt正交化构造:

从一组线性无关的元素 $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ 生成

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_k(x) = x^k - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\varphi_j, x^k)}{(\varphi_j, \varphi_j)} \varphi_j, k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$(x^k, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) x^k \varphi_j(x) dx$
 $(\varphi_j, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) [\varphi_j(x)]^2 dx$

$$(\varphi_k, \varphi_l) = (x^k, \varphi_l) - \left(\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\varphi_j, x^k)}{(\varphi_j, \varphi_j)} \varphi_j, \varphi_l \right) = (x^k, \varphi_l) - \frac{(\varphi_l, x^k)}{(\varphi_l, \varphi_l)} (\varphi_l, \varphi_l) = 0$$

之前的元素已经正交, 只留下 φ_j

由此可见, 不同的权函数会构造出不同的正交多项式

Legendre(勒让德)多项式



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

在区间 $[-1,1]$, 令权函数 $\rho(x) \equiv 1$, 由如上的Gram-Schmidt得到的多项式 $P_0(x) = 1, P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, n = 1, 2, \dots$

性质1

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

正交性

性质2

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

奇偶性

性质3

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

方便编程!

性质4

首项系数 $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

Legendre(勒让德)多项式



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

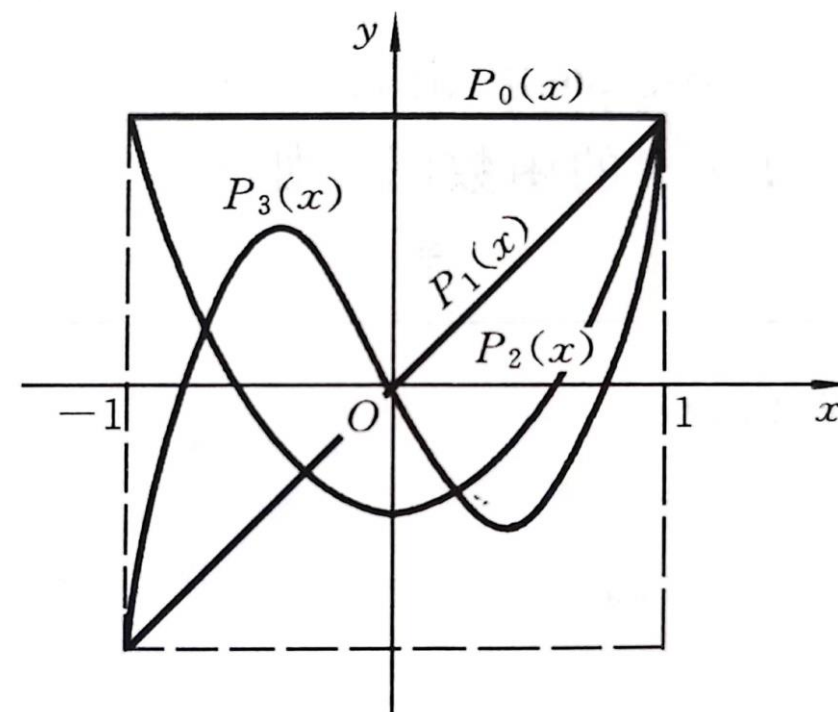
$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

$$P_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16$$



性质5

在所有最高项系数为1的 n 次多项式中, Legendre多项式在 $[-1, 1]$ 上与0的平方误差最小

性质6

在 $(-1, 1)$ 内有 n 个不同的实零点

Chebyshev(切比雪夫)多项式



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

在区间 $[-1,1]$, 令权函数 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 由如上的Gram-Schmidt得到的多项式 $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x), n = 0, 1, \dots$

性质1

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases} \quad \text{正交性}$$

性质2

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x) \quad \text{奇偶性}$$

性质3

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0 = 1, T_1 = x \quad \text{方便编程!}$$

性质4

$$\text{首项系数} \quad 2^{n-1}$$

Chebyshev(切比雪夫)多项式



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

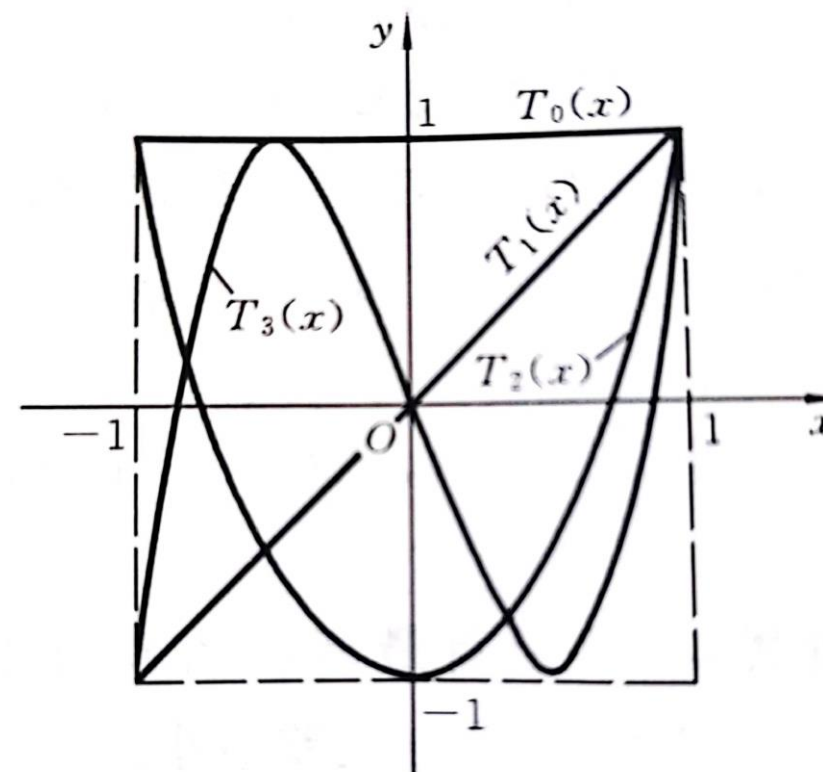
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$



性质5

在区间 $[-1, 1]$ 上的所有最高项系数为1的 n 次多项式中,

$\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ 与0的偏差最小, 其偏差为 $\frac{1}{2^{n-1}}$

性质6

在 $[-1, 1]$ 内有 n 个零点 $x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, k = 1, \dots, n$

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

Laguerre多项式：在区间 $[0, \infty)$ ，令权函数 $\rho(x) = e^{-x}$

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), n = 0, 1, \dots$$

$$L_0 = 1, L_1 = 1 - x$$

$$L_{n+1}(x) = (1 + 2n - x)L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x)$$

Hermite多项式：在区间 $(-\infty, +\infty)$ ，令权函数 $\rho(x) = e^{-x^2}$

$$H_n = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, n = 0, 1, \dots$$

$$H_0 = 1, H_1 = 2x$$

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$



概论

研究的问题
准备知识
函数逼近问题

正交多项式

定义
性质
Legendre
Chebyshev
其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算
正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算
正交多项式方法

编程实践

6.1 概论

6.2 正交多项式

6.3 最佳平方逼近

6.4 最小二乘法

6.5 编程实践

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

如果我们要在代数多项式中找到一个 p^* 满足: $f(x) - p(x)$ 在某种意义下最小

什么叫某种意义? $\|f(x) - p(x)\|$

情况一

$$\|f - p^*\|_{\infty} = \min \|f - p\|_{\infty} = \min \max_{a \leq x \leq b} |f - p|$$

最佳一致逼近多项式

即是数字信号处理中的切比雪夫一致逼近

情况二

$$\|f - p^*\|_2^2 = \min \|f - p\|_2^2 = \min \int_a^b [f(x) - p(x)]^2 dx$$

最佳平方逼近多项式

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

情况三

如果函数在若干个点上给出值 $f(x_i), i = 0, 1, \dots, m$

$$\|f - p^*\|_2^2 = \min \|f - p\|_2^2 = \min \sum_{i=0}^m [f(x_i) - p(x_i)]^2$$

最小二乘拟合

即是我们通常处理数据的方式

实际上，我们还可以采用有理分式逼近，或者三角多项式逼近

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \sin kx + b_k \cos kx)$$

傅里叶分析!

接下来，我们只讨论代数多项式中的情况二和情况三

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

先取**线性无关**的一组函数 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$

令: $s(x) \in \Phi = \text{span}\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$, 或者也可以写成

$$s(x) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x)$$

定义7.2.1 (教材编号)

设 , 如果存在 $s^* \in \Phi$ 使得

$$\|f - s^*\|_2 = \min \|f - s\|_2$$

那么称 $s^*(x)$ 为 $f(x)$ 在 Φ 中的**最佳平方逼近**

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

考虑2-范数的特点，上面的定义可以写成

$$\underline{F(a_0, a_1, \dots, a_n)} = \int_a^b \rho(x) \left[f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) \right]^2 dx$$

这是一个关于多项式系数的多元函数，求其极值，可以

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0, k = 0, 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) - f(x) \right] \varphi_k(x) dx = 0$$

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

$$\int_a^b \rho(x) \left[\sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) - f(x) \right] \varphi_k(x) dx = 0$$

⇒ 用加权内积的定义 $\sum_{j=0}^n (\varphi_k, \varphi_j) a_j = (f, \varphi_k), k = 0, 1, \dots, n$

⇒ 展开成矩阵的形式

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{bmatrix}$$

法方程

Gram矩阵, 线性无关时非奇异

因而有唯一解 $\bar{a}^* = (a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)^T$

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

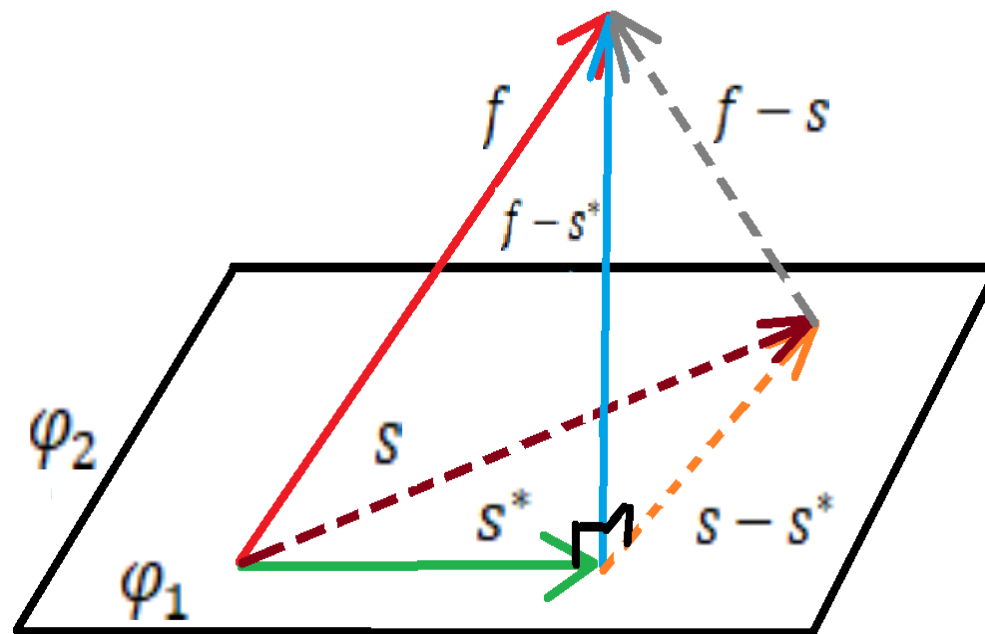
概念及计算

正交多项式方法

编程实践

$$s^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j^* \varphi_j(x)$$

由于 $\frac{\partial F}{\partial a_k} = 0, k = 0, 1, \dots, n$ 只是多元函数极值的**必要条件**, 但是
可以证明 s^* 确实满足最佳平方逼近, 即 $\|f - s^*\|_2 \leq \|f - s\|_2$



概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

若取 $s \in \Phi = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$, 请推导 $[0,1]$ 区间里最佳平方逼近法方程系数矩阵: Gram矩阵

方程系数矩阵中任意一个元素

$$A_{ij} = A_{ji} = (x^i, x^j) = \int_0^1 x^i x^j dx = \frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1} \Big|_1 - \frac{1}{i+j+1} x^{i+j+1} \Big|_0 = \frac{1}{i+j+1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

著名病态矩阵Hilbert矩阵
显然这样的函数族选的不太好



正交多项式方法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \int_a^b \rho(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \begin{cases} 0, i \neq j \\ A_j, i = j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{bmatrix}$$

$$a_k^* = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)} = \frac{1}{\|\varphi_k\|_2^2} (f, \varphi_k), k = 0, 1, \dots, n$$



$$s^*(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\|\varphi_k\|_2^2} (f, \varphi_k) \varphi_k(x)$$



$$\|f - s^*\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \left[\frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|_2} \right]^2}$$

此时，可以用Gram-Schmidt生成正交多项式
也可以直接采用归一化为**标准正交基**的Legendre多项式

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

若 $Q_n(x)$ 为首项系数为1的任意 n 次多项式, $\tilde{P}_n(x)$ 相应的首项系数为1的Legendre多项式

$$Q_n(x) = \tilde{P}_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tilde{P}_k(x)$$

$$\Rightarrow \|Q_n - 0\|_2^2 = \int_{-1}^1 [Q_n(x)]^2 dx = \|\tilde{P}_n(x)\|_2^2 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \|\tilde{P}_k(x)\|_2^2 \geq \|\tilde{P}_n(x)\|_2^2$$

等号在 $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ 时成立,
即 Legendre多项式是所有 $Q_n(x)$ 中与0的平方误差最小的

教材定理7.2.1

$$\text{对于任意区间: } x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}, t \in [-1, 1]$$



概论

研究的问题
准备知识
函数逼近问题

正交多项式

定义
性质
Legendre
Chebyshev
其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算
正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算
正交多项式方法

编程实践

6.1 概论

6.2 正交多项式

6.3 最佳平方逼近

6.4 最小二乘法

6.5 编程实践

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

上节课在理论上，我们完美的得到了函数 $f(x)$ 一个最佳平方逼近解 s^* ；但是实际上使用这个方法会有问题



注意法方程的常数项： $(f, \varphi_k), k = 0, 1, \dots, n$

待逼近的函数需要预先知道！

我们需要改变一下思路

如果函数在若干个点上 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m \leq b$ 上给出值 $f(x_i), i = 0, 1, \dots, m$ ，或者说，我们可以把 f 看成一个离散函数，此时找到一个 $s^* \in \Phi$ 使得：

$$\|f - s^*\|_2^2 = \min \|f - s\|_2^2 = \min \sum_{i=0}^m \rho(x_i) [f(x_i) - s(x_i)]^2$$

离散加权内积

称 s^* 为**最小二乘曲线拟合**

定义，教材编号7.4.1

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

$$F(a_0, a_1, \dots, a_n) = \int_a^b \rho(x) \left[f(x) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x) \right]^2 dx$$

之前的最佳平方逼近

$$\Rightarrow F(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=0}^m \rho(x_j) \left[f(x_j) - \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x_j) \right]^2$$

现在的最小二乘拟合

$$\frac{\partial F}{\partial a_k} = -2 \sum_{j=0}^m \rho(x_j) \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^n a_i \varphi_i(x_j) \right] \varphi_k(x_j) = 0, k = 0, 1, \dots, n$$

利用离散加权内积的定义可得: $\sum_{i=0}^n (\varphi_i, \varphi_k) a_i = (f, \varphi_k), k = 0, 1, \dots, n$

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{bmatrix}$$

刚才的最佳平方逼近法方程

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{bmatrix}$$

现在的最小二乘拟合法方程

不一样的是内积的定义

$$(f, \varphi_0) = \sum_{j=0}^m \rho(x_j) f(x_j) \varphi_0(x_j)$$

为什么一模一样?



概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & (\varphi_n, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f, \varphi_0) \\ (f, \varphi_1) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{bmatrix}$$

同样，如果该方程的系数矩阵非奇异的话，可以解出唯一解 s^* ；但是这里需要注意的是， $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性无关不能保证由离散点获得的这个系数矩阵也非奇异！

若取： $\Phi = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

此时该系数矩阵是非奇异的

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,x) & \cdots & (1,x^n) \\ (x,1) & (x,x) & \cdots & (x,x^n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x^n,1) & (x^n,2) & \cdots & (x^n,x^n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,1) \\ (f,x) \\ \vdots \\ (f,x^n) \end{bmatrix}$$

概论

研究的问题
准备知识
函数逼近问题

正交多项式

定义
性质
Legendre
Chebyshev
其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算
正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算
正交多项式方法

编程实践

$$\sum_{i=0}^n (\varphi_i, \varphi_k) a_i = (f, \varphi_k), k = 0, 1, \dots, n$$

对于这一法方程，若我们得到唯一的解 s^* 可以按照最佳平方逼近一样的步骤证明

$$\|f - s\|_2^2 \geq \|f - s^*\|_2^2$$

同时，最小二乘曲线拟合的误差

$$\|\delta\|_2 = \sqrt{\|f\|_2^2 - \sum_{j=0}^n a_j^*(f, \varphi_j)}$$

也可以直接用： $\|\delta\|_2 = \|f - s^*\|_2$

唯一要注意的就是**内积**的定义

概念及计算



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第六章

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

$$\begin{bmatrix} (1,1) & (1,x) & \cdots & (1,x^n) \\ (x,1) & (x,x) & \cdots & (x,x^n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (x^n,1) & (x^n,x) & \cdots & (x^n,x^n) \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

最佳平方逼近



最小二乘拟合



$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{bmatrix}$$

$$A_{ij} = A_{ji} = (x^i, x^j) = \sum_{k=0}^m x_k^{i+j}$$

$$b_i = (f, x^i) = \sum_{k=0}^m f(x_k) x_k^i$$

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

已知 $x_0, x_1, \dots, x_m$ 及相应的函数值 $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_m)$, 构造 n 次正交多项式进行最小二乘拟合

$$\begin{cases} \varphi_0(x) = 1 \\ \varphi_1(x) = (x - \alpha_1)\varphi_0(x) \\ \varphi_{k+1}(x) = (x - \alpha_{k+1})\varphi_k(x) - \beta_k\varphi_{k-1}(x) \end{cases}$$

$$\text{其中, } \alpha_{k+1} = \frac{\sum_{j=0}^m \rho(x_j) x_j \varphi_k^2(x_j)}{\sum_{j=0}^m \rho(x_j) \varphi_k^2(x_j)} = \frac{(x\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$
$$\beta_k = \frac{\sum_{j=0}^m \rho(x_j) \varphi_k^2(x_j)}{\sum_{j=0}^m \rho(x_j) \varphi_{k-1}^2(x_j)} = \frac{(\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})}$$

则函数族 $\{\varphi_k(x)\}, k = 0, 1, \dots, n$ 为正交函数族

$$s(x) = \sum_{j=0}^n a_j \varphi_j(x)$$

$$a_k = \frac{\sum_{j=0}^m \rho(x_j) f(x_j) \varphi_k(x_j)}{\sum_{j=0}^m \rho(x_j) \varphi_k^2(x_j)} = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$



概论

研究的问题
准备知识
函数逼近问题

正交多项式

定义
性质
Legendre
Chebyshev
其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算
正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算
正交多项式方法

编程实践

6.1 概论

6.2 正交多项式

6.3 最佳平方逼近

6.4 最小二乘法

6.5 编程实践

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

✓ LeastSquare类

最佳平方
逼近问题

$$s(x) = a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

$$D = \sqrt{\int_a^b \rho(x)[s(x) - f(x)]^2 dx}$$

$$\frac{\partial D}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \longrightarrow \begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_2, \varphi_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_1, f) \\ (\varphi_2, f) \\ \vdots \\ (\varphi_n, f) \end{bmatrix}$$

函数带
权内积

$$(g, h) = \int_a^b \rho(x)g(x)h(x) dx$$

计算数值积分的方法将在后续章节给出，
所以此处暂时只考虑离散点的函数拟合

线性最小二乘问题，记

$$Y = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_m)]^T$$

$$Y_i = [\varphi_i(x_1), \varphi_i(x_2), \dots, \varphi_i(x_m)]^T$$

$$S = [s(x_1), s(x_2), \dots, s(x_m)]^T$$

等价于以下问题：

用一组基向量 $[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$
的线性组合逼近目标向量 Y

$$S = a_1Y_1 + a_2Y_2 + \cdots + a_nY_n$$

考虑权函数 $\rho(x) \equiv 1$ ，有

$$D = \|S - Y\|_2$$

$$(\varphi_i, \varphi_j) = Y_i \cdot Y_j$$

$$(\varphi_i, f) = Y_i \cdot Y$$

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

✓ LeastSquare类 (LinearFit方法)

```
public static Vector LinearFit(Vector targetY, params Vector[] baseYs)
```

目标向量与一系列基向量

```
{
    Matrix A = new Matrix(baseYs.Length, baseYs.Length);
```

```
    Vector b = new Vector(baseYs.Length);
```

```
    for (int i = 0; i < baseYs.Length; i++)
```

```
{
```

```
        for (int j = 0; j < i; j++)
```

```
{
```

```
            A[i, j] = baseYs[i] * baseYs[j];
```

```
            A[j, i] = A[i, j];
```

```
}
```

```
        A[i, i] = baseYs[i] * baseYs[i];
```

```
        b[i] = targetY * baseYs[i];
```

```
}
```

```
    Vector ans = GaussElimination.Solve(A, b);
```

```
    if (ans is null)
```

```
        throw new Exception("基向量线性相关, 无法进行线性最小二乘拟合!");
```

```
    return ans;
```

```
}
```

实际上要做的就是求解线性方程组 $Ax=b$

利用系数矩阵对称减少计算

$$\begin{bmatrix} Y_1 \cdot Y_1 & Y_1 \cdot Y_2 & \cdots & Y_1 \cdot Y_n \\ Y_2 \cdot Y_1 & Y_2 \cdot Y_2 & \cdots & Y_2 \cdot Y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_n \cdot Y_1 & Y_n \cdot Y_2 & \cdots & Y_n \cdot Y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \cdot Y \\ Y_2 \cdot Y \\ \vdots \\ Y_n \cdot Y \end{bmatrix}$$

计算系数矩阵对角线元素以及右端向量

调用高斯消去法求解, 基向量线性相关时解不唯一

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

✓ LeastSquare类 (PolynomialRegression方法)

```
public static Polynomial PolynomialRegression(Vector xs, Vector ys, int degree = 1)
```

```
{  
    Vector[] baseYs = new Vector[degree + 1];  
    baseYs[0] = new Vector(xs.Length, true);  
    for (int i = 1; i <= degree; i++)  
    {  
        baseYs[i] = baseYs[i - 1].Multiply(xs);  
    }  
}
```

根据基函数

$[1, x, \dots, x^n]$

构造对应的基向量

$Y_0 = [1, 1, \dots, 1]$

$Y_{k+1} = Y_k * X$

```
Vector factors = LinearFit(ys, baseYs);
```

用向量线性拟合方法求出各基向量的系数，即为各基函数的系数

```
double[] temp = new double[factors.Length];  
factors.CopyTo(temp);  
return new Polynomial(temp);
```

基函数系数即为多项式系数，直接构造对应多项式并返回即可

最小二乘法得到的法方程一般是病态的，可以进一步考虑将该组基函数改成正交的一组多项式，满足

$$Y_i \cdot Y_j = 0, i \neq j$$

$$Y_i \cdot Y_j > 0, i = j$$

此时待求解的系数矩阵是对角阵

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

✓ LeastSquare类 (PolynomialRegression2方法)

```
public static Polynomial PolynomialRegression2(Vector xs, Vector ys, int degree = 1)
{
```

```
    Polynomial ans = new Polynomial();
```

用来保存结果

$$\varphi_0(x) = 1$$

```
    Polynomial[] ps = new Polynomial[degree + 1];
    ps[0] = new Polynomial(0);
```

用来保存正交多项式

```
    double alpha, beta, dot = 0, oldDot;
```

```
    Vector Yk;
```

```
    for (int i = 1; i <= degree; i++)
```

```
    {
```

```
        Yk = xs.Mapping(ps[i - 1].AsFunction);
```

Yk即为 Y_{i-1}

```
        oldDot = dot;
```

```
        dot = Yk * Yk;
```

```
        ans += ys * Yk / dot * ps[i - 1];
```

$$s(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

```
        alpha = Yk.Multiply(xs) * Yk / dot;
```

```
    // .....
```

```
}
```

$$\alpha_i = \frac{(Y_{i-1} * X, Y_{i-1})}{(Y_{i-1}, Y_{i-1})}$$

$$a_{i-1} = \frac{(Y_{i-1}, Y)}{(Y_{i-1}, Y_{i-1})} = \frac{Y_{i-1} \cdot Y}{Y_{i-1} \cdot Y_{i-1}}$$

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

✓ LeastSquare类 (PolynomialRegression2方法)

```
public static Polynomial PolynomialRegression2(Vector xs, Vector ys, int degree = 1)
{
```

```
// .....
```

```
    if (i == 1)
```

```
        ps[i] = new Polynomial(-alpha, 1) * ps[i - 1];
```

$$\varphi_1(x) = (x - \alpha_1)\varphi_0(x)$$

```
    else
```

```
{
```

```
        beta = dot / oldDot;
```

```
        ps[i] = new Polynomial(-alpha, 1) * ps[i - 1] - beta * ps[i - 2];
```

```
    }
```

```
}
```

```
Yk = xs.Mapping(ps[degree].ToFunction());
ans += ys * Yk / (Yk * Yk) * ps[degree];
```

$$\beta_i = \frac{(Y_{i-1}, Y_{i-1})}{(Y_{i-2}, Y_{i-2})}$$

$$\varphi_i(x) = (x - \alpha_i)\varphi_{i-1}(x) - \beta_i\varphi_{i-2}(x)$$

```
return ans;
```

```
}
```

最后加上 $a_n\varphi_n(x)$

经过测试，采用正交多项式方法的误差要比向量逼近要大一些，可能是因为计算过程中的误差积累

概论

研究的问题

准备知识

函数逼近问题

正交多项式

定义

性质

Legendre

Chebyshev

其他多项式

最佳平方逼近

概念及计算

正交多项式方法

最小二乘法

概念及计算

正交多项式方法

编程实践

- 理解**函数逼近**和**插值方法**概念和区别
- 掌握**正交多项式**的概念、构造方法和性质
- 理解**Legendre多项式**、**Chebyshev多项式**的概念和性质
- 理解**最佳平方逼近**方法的思路
- 掌握**最小二乘法**的思路和计算方法

作业

教材P223-5、P223-9

补充题：证明Gram矩阵对称正定等价于 $\{\varphi_k\}$ 线性无关