



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School

工程硕士数学

第二章 线性方程组的直接解法

胡振中 副教授

海洋大楼 702-3, 15999640239 (微信同号)

邮箱: huzhenzhong@tsinghua.edu.cn

个人网站: <http://www.huzhenzhong.net>

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

2.1 概论及背景知识回顾

2.2 高斯消去法

2.3 直接三角分解法

2.4 理论问题

2.5 编程实践（穿插在两周中）

本章研究的问题



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} \begin{cases} \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{0}} & \text{齐次线性方程组} \\ & \text{基础解系: 若 } \mathbf{x}_0 \text{ 是方程的解, 则 } k\mathbf{x}_0, k \in \mathbb{R} \\ & \text{也是方程的解} \\ \bar{\mathbf{b}} \neq \bar{\mathbf{0}} & \text{非齐次线性方程组} \end{cases}$$

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

4/81

定义2.1.1

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$j_1 j_2 \cdots j_n \Rightarrow$ 取遍 $j = 1, 2, \dots, n$ 每一个数的一个排列

$k \Rightarrow$ 排列的逆序数 (总个数)

$\sum \Rightarrow$ 取遍所有的排列求和

一个排列中, 如果一个大数排在小数之前, 就成这两个数构成一个逆序

一个排列逆序总数称为这个排列的逆序数, 记作 τ

2341中有21, 31, 41, 故 $\tau(2341) = 3$

克莱姆法则 (Cramer's Rule)



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题
矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

对于非齐次线性方程组: $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}$ $\bar{b} \neq \bar{0}$ 且满足 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, 该方程的解为

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

其中: $D = \det(\mathbf{A})$

D_j 为系数矩阵的第 j 列用 $\bar{b}$ 替换的新的矩阵的行列式

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \boxed{b_2} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \boxed{\vdots} & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{b_n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

第j列

矩阵的行列式的重要性质



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

6/81

行列式性质1 对于任意一个排列 $j_1 j_2 \dots j_s \dots j_t \dots j_n$, 交换s和t元素的位置, 其逆序数改变奇偶

$$\det(\mathbf{A}) = \sum (-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n} \Rightarrow \det(\mathbf{A}_{i \leftrightarrow j}) = -\det(\mathbf{A})$$

由此可得：交换矩阵任意两行，行列式改变正负号

行列式性质2 可以看作从每一行取一**列**下标不同的排列, 也可以看作从每一列取一**行**下标不同的排列; 且交换s和t元素, 包含了行下标和列下标的同时交换, 奇偶一致变化

由此可得： $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

推论：对行列式的行操作和列操作完全等效，行列地位对称！

矩阵的行列式的重要性质



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

7/81

行列式性质3 由性质1衍生出，若行列式的两行（或列）记作 i 和 j 的元素相等，则行列式为0

交换后的行列式 $\det(\mathbf{A}_{i \leftrightarrow j})$ 由性质1得： $\det(\mathbf{A}_{i \leftrightarrow j}) = -\det(\mathbf{A})$

又由于两行元素相等，得： $\det(\mathbf{A}_{i \leftrightarrow j}) = \det(\mathbf{A})$ **显然：** $\det(\mathbf{A}) = 0$

行列式性质4

若行列式A任意一行（或列）元素全为0，则： $\det(\mathbf{A}) = 0$

若行列式A任意一行（或列）元素乘上系数 c ，则新行列式的值为： $c \det(\mathbf{A})$

那么： $\det(c\mathbf{A})$ 是多少？

$$(-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{nj_n}$$





矩阵的行列式的重要性质



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

8/81

行列式性质5

如果行列式的两行（列）元素成比例，则行列式为0

可以提出比例系数，使得两行元素相等 $\det(\mathbf{A}') = c \det(\mathbf{A}) = -c \det(\mathbf{A}'_{i \leftrightarrow j})$

显然： $\det(\mathbf{A}') = \det(\mathbf{A}) = 0$

行列式性质6

$$(-1)^k a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{ij_i} \dots a_{nj_n}$$



$$a_{ij_i} + a'_{ij_i}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} + a'_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} + a'_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & a_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a_{nj} & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & a'_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & a'_{nj} & \dots \end{vmatrix}$$



$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

是否正确? **✗**

矩阵的行列式的重要性质



概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

行列式性质7

把行列式的某一行（列）的个元素乘一个系数 c ，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式的值不变

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1s} + ca_{1t} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ns} + ca_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdots & a_{1s} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{ns} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & ca_{1t} & \cdots & a_{1t} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & ca_{nt} & \cdots & a_{nt} & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1s} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & a_{ns} & \cdots \end{vmatrix}$$

矩阵的行列式的重要性质



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆
高斯消去法
常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解
直接三角分解法
Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解
理论问题
矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数
编程实践

定义2.1.2

在 n 阶行列式中，若划去 a_{ij} 元素所在的 i 行和 j 列元素，剩下的元素不改变顺序构成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式。记作 M_{ij}

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

另记 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为 a_{ij} 的代数余子式

矩阵的行列式的重要性质



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

11/81

行列式性质8 行列式等于它任意一行（列）的各元素与其对应的**代数余子式**乘积之和

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

举例说明：

$$(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} \end{vmatrix} \quad (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

推论：某一行的所有元素与另一行相应元素的代数余子式乘积之和为0！

$$a_{i_1}A_{k_1} + a_{i_2}A_{k_2} + \cdots + a_{i_n}A_{k_n} = 0, k \neq i$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

12/81

定义2.1.3

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ，若存在同阶方阵 $\mathbf{B}$ ，满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$ ，则称 $\mathbf{A}$ 是 **可逆的** 或 **非奇异的**， $\mathbf{B}$ 是 $\mathbf{A}$ 的逆，记 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$

充分必要条件： $|\mathbf{A}| \neq 0$ ，且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$ ， $\mathbf{A}^*$ 称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式

方阵的逆



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} = \mathbf{I}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} \quad \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\bar{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{A}^*\bar{\mathbf{b}}}{|\mathbf{A}|} \longrightarrow x_j = A_{1j}b_1 + A_{2j}b_2 + \dots + A_{nj}b_n$$

Cramer's Rule!
回到起点!

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

2.1 概论及背景知识回顾

2.2 高斯消去法

2.3 直接三角分解法

2.4 理论问题

2.5 编程实践（穿插在两周中）

矩阵的初等变换



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

□ 交换两行

□ 某一行乘一个常数

□ 某行乘一个常数加到另一行上

$$\vec{u}\vec{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} [v_1 \quad \cdots \quad v_n] = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & \cdots & u_1 v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n v_1 & \cdots & u_n v_n \end{bmatrix}$$

矩阵?



定义2.2.1 (教材P31编号1.6.9)

设 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \neq 0$, 则矩阵

$$\mathbf{E}(\vec{u}, \vec{v}; \sigma) = \mathbf{I} - \sigma \vec{u}\vec{v}^T$$

称为**实初等矩阵**

矩阵的初等变换



清华大学 深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法

列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积

范数
条件数

编程实践

$$\mathbf{E}(\vec{u}, \vec{v}; \sigma) = \mathbf{I} - \sigma \vec{u} \vec{v}^T$$

$$\mathbf{E}(\vec{u}, \vec{v}; \tau) = \mathbf{I} - \tau \vec{u} \vec{v}^T$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}(\vec{u}, \vec{v}; \sigma) \\ \mathbf{E}(\vec{u}, \vec{v}; \tau) \end{array} \right\} \begin{aligned} & \mathbf{E}(\vec{u}, \vec{v}; \sigma) \mathbf{E}(\vec{u}, \vec{v}; \tau) \\ &= (\mathbf{I} - \sigma \vec{u} \vec{v}^T)(\mathbf{I} - \tau \vec{u} \vec{v}^T) \\ &= \mathbf{I} - \sigma \vec{u} \vec{v}^T - \tau \vec{u} \vec{v}^T + \sigma \tau [u_i \vec{v}^T \vec{u} v_j]_{ij} \\ &= \mathbf{I} - (\sigma + \tau - \sigma \tau \vec{v}^T \vec{u}) \vec{u} \vec{v}^T \end{aligned}$$

$$\text{令 } \sigma + \tau - \sigma \tau \vec{v}^T \vec{u} = 0 \Rightarrow \tau = \frac{\sigma}{\sigma \vec{v}^T \vec{u} - 1}$$

$$\text{则 } \mathbf{E}^{-1}(\vec{u}, \vec{v}; \sigma) = \mathbf{E}\left(\vec{u}, \vec{v}; \frac{\sigma}{\sigma \vec{v}^T \vec{u} - 1}\right)$$

另外，不加以证明的给出 $\det(\mathbf{E}(\vec{u}, \vec{v}; \sigma)) = 1 - \sigma \vec{v}^T \vec{u}$

矩阵的初等变换



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

17/81

初等排列阵: $\sigma = 1, \vec{u} = \vec{v} = \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j = [0 \cdots \underset{i}{1} \cdots \underset{j}{-1} \cdots 0]^T, i \neq j$

$$\mathbf{I}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \underset{1}{a_{ij}} \\ & & & \ddots & \\ & & \underset{a_{ji}}{1} & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{ij}^{-1} = \mathbf{I}_{ij} \quad \det(\mathbf{I}_{ij}) = -\det(\mathbf{I}) = -1$$

$\mathbf{I}_{ij}\mathbf{A}$ 是将矩阵 $\mathbf{A}$ 的 i, j 行互换,

$\mathbf{A}\mathbf{I}_{ij}$ 是将矩阵 $\mathbf{A}$ 的 i, j 列互换

倍乘变换阵: $\sigma = 1 - \alpha, \vec{u} = \vec{v} = \mathbf{e}_i$

$$\mathbf{E} = \mathbf{I} - (1 - \alpha)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i^T = \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & 1 - \alpha & \\ 0 & & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的初等变换



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

18/81

倍加变换阵: $\sigma = -\alpha, \vec{u} = \mathbf{e}_j, \vec{v} = \mathbf{e}_i$

EA 什么效果?



$$E = I + \alpha \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^T$$

$$= I + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Diagram illustrating the matrix E. A dashed red box highlights the row i and column j. The element at row i, column j is labeled α . The element at row j, column j is labeled 1. The element at row i, column i is labeled 1. The row i is labeled i列 and the column j is labeled j列. A red arrow points from the α element to the 1 element at row j, column j.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \alpha \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}$

$$a_{jk}^{new} = \alpha a_{ik} + a_{jk}, k = 1, 2, \dots, n$$

新矩阵的第j行元素由原矩阵的第i行对应元素乘系数后加上第j行对应元素而来

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换

顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

19/81

初等单位下三角矩阵

$$\sigma = -1, \vec{v} = \mathbf{e}_j, \vec{u} = \mathbf{l}_j = [0, \dots, 0, l_{j+1,j}, \dots, l_{n,j}]^T$$

显然，这是一系列的倍加阵

倍加阵

$$\sigma = -\alpha, \vec{u} = \mathbf{e}_j, \vec{v} = \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{L}_j(l_j) = \mathbf{I} + l_j \mathbf{e}_j^T = \mathbf{I} + \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & l_{j+1,j} & \ddots & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & l_{n,j} & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & l_{j+1,j} & \ddots & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & l_{n,j} & & & 1 \end{bmatrix}$$

这是一个下三角阵的特例，所以： $\det(\mathbf{L}_j) = 1$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换

顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

20/81

单位下三角矩阵

$$L = L_1(l_1)L_2(l_2) \cdots L_{n-1}(l_{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

LA 每一个 l_{ij} 代表了用 A 的第 i 行乘上 l_{ij} 加到 A 的第 j 行

$$L_j^{-1}(l_j) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -l_{j+1,j} & \ddots & \\ & \vdots & & \ddots \\ & -l_{n,j} & & & 1 \end{bmatrix}$$

到此，除了 $\det(\mathbf{AB})$ 尚未定义，我们已经有了其他所有的工具！

Gauss顺序消去法



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

21/81

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \quad \text{记增广矩阵:}$$

$$\left[\mathbf{A} \mid \vec{b}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

假设 $a_{11} \neq 0$, 第一步消去

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}, i = 2, 3, \dots, n$$

$$l_1 = [0, l_{21}, \dots, l_{n1}]^T$$

$$\left[\mathbf{A} \mid \vec{b}\right]^{(2)} = \mathbf{L}_1^{-1} \left[\mathbf{A} \mid \vec{b}\right]^{(1)}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -l_{21} & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ -l_{n1} & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss顺序消去法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

22/81

假定已经完成 $k-1$ 步消元 $[\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(k)} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

直到: $[\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(n)} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, i = k + 1, \dots, n$

$$\mathbf{L}_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & -l_{ik} & \ddots & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & -l_{nk} & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$[\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(k+1)} = \mathbf{L}_k^{-1} [\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(k)}$$

Gauss顺序消去法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

23/81

$$A^{(n)} = \underline{L_{n-1}^{-1} L_{n-2}^{-1} \dots L_2^{-1} L_1^{-1}} A^{(1)}$$

是否构成逆?

回想一下, $L = L_1(l_1)L_2(l_2)\dots L_{n-1}(l_{n-1})$

$$\det(L_j^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{(n)}) = \det(A^{(1)}) \neq 0$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \frac{\left(b_i^{(n)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j \right)}{a_{ii}^{(i)}} \end{cases}$$

Gauss顺序消去法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

24/81

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**这一过程是否
一定可以实现?**

$$[\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6.5 & 6.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \\ & & 6.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6.5 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_2 &= \frac{5-3x_3}{-2} = -1 \\ x_1 &= \frac{1+2x_3-x_2}{2} = 2 \end{aligned}$$

第 k 步消去除法 $(n-k)$, 乘法 $(n-k)(n-k)$,
消除过程乘、除总数

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(n-k+1) \sim n^3$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

25/81

定义2.2.2 (教材第30页)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

记矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}$ 为A的*i*阶顺序主子矩阵
 $i = 1, 2, \dots, n$

他们的行列式记作 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, 称为A的**顺序主子式**

$$\Delta_1 = a_{11} \quad \Delta_n = \det(\mathbf{A})$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

26/81

定理2.2.1 (教材编号)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若对 $k=1,2,\dots,n$, $\mathbf{A}$ 的顺序主子式 $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \dots, \Delta_k \neq 0$ 则每步对应的消去过程的对角元满足: $a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{22}^{(2)} \neq 0, \dots, a_{kk}^{(k)} \neq 0$

归纳法证明: $\Delta_1 = a_{11} = a_{11}^{(1)} \neq 0$ 故对 $k=1$ 满足

若对 $k-1$ 满足, 则: $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \dots, \Delta_{k-1}$

且有: $a_{11}^{(1)} \neq 0, a_{22}^{(2)} \neq 0, \dots, a_{k-1,k-1}^{(k-1)} \neq 0$

待证: 若 $\Delta_k \neq 0$, 则 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

故: $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

$$\mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{L}_k \mathbf{A}^{(k-1)} \Rightarrow \det(\mathbf{A}^{(k)}) = \det(\mathbf{A}^{(k-1)})$$

$$\Rightarrow \Delta_k = a_{11}^{(1)} a_{22}^{(2)} \dots a_{k-1,k-1}^{(k-1)} a_{kk}^{(k)} = \Delta_{k-1} a_{kk}^{(k)} \neq 0$$

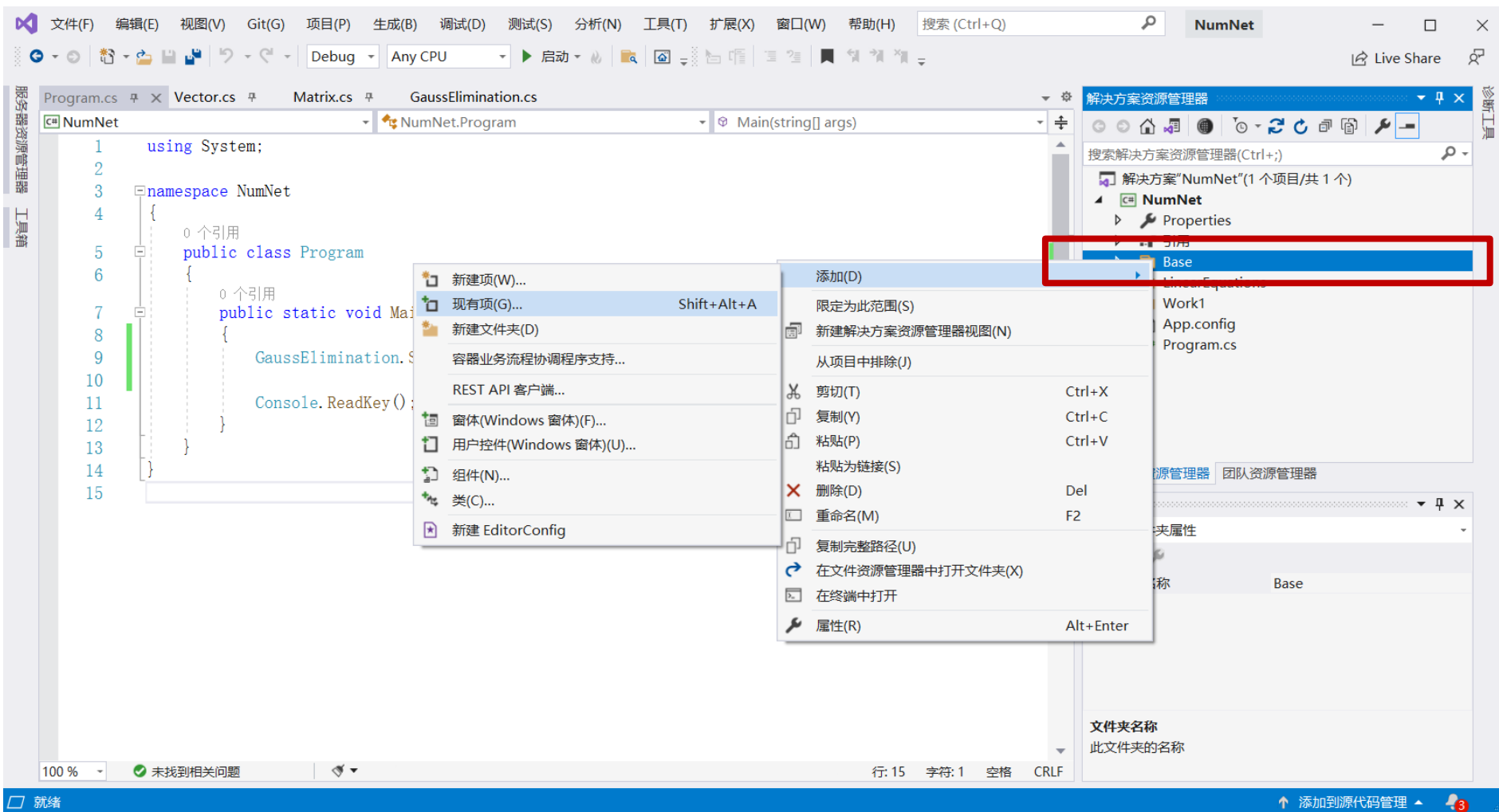
概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆
高斯消去法
常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解
直接三角分解法
Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解
理论问题
矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

27/81

✓ 添加向量、矩阵基本库



①在NumNet项目中新建一个Base文件夹

②右击该文件夹，选择添加现有项，然后在对话框中选中网络学堂下载的Vector.cs和Matrix.cs文件

之后就可以在项目中使用这两个类了

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

28/81

✓ Vector类使用指南

// 构造一个空向量

```
Vector v = new Vector();
```

// 构造一个有2个元素的零向量

```
v = new Vector(2);
```

// 构造2个元素均为1的向量

```
v = new Vector(2, true);
```

// 构造一个元素为1, 2, 3的向量

```
v = new Vector(1, 2, 3);
```

```
v = new Vector(new double[] {  
    1, 2, 3 });
```

// 向量的元素个数

```
int length = v.Length;
```

// 对向量元素赋值

```
v[0] = 10;
```

// 向量的正负

```
Vector v2 = +v;
```

```
v2 = -v;
```

// 向量加减乘除

```
Vector v3 = v + v2;
```

```
v3 = v - v2;
```

```
v3 = 1.2 * v * 1.2;
```

```
v3 = v / 3;
```

// 执行对应元素的乘法、除法

```
v3 = v.Multiply(v2);
```

```
v3 = v.Divide(v2);
```

// 向量内积

```
double dot = v * v2;
```

// 向量各元素是否均相等

```
v.Equals(v2);
```

// 是否零向量

```
v.IsZero();
```

// 拷贝向量到一个新对象

```
v3 = v.Copy();
```

// 将v的全部内容拷贝到v4,

// 从v4的索引位置1开始

```
var v4 = new Vector(4);
```

```
v.CopyTo(v4, 1);
```

// 向量拼接

```
v4 = v.Concat(v2);
```

// 提取子向量

```
v4 = v.SubVector(0, 2);
```

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

29/81

✓ Matrix类使用指南

// 构造一个空矩阵

```
Matrix m = new Matrix();
```

// 构造一个3行4列的零矩阵

```
m = new Matrix(3, 4);
```

// 构造一个3行4列，元素均为1的矩阵

```
m = new Matrix(3, 4, true);
```

// 构造一个3行4列自定义矩阵

```
m = new Matrix(new double[,] {  
    { 1, 2, 3, 4 },  
    { 5, 6, 7, 8 },  
    { 9, 10, 11, 12 } });
```

```
m = new Matrix(new Vector(1, 2, 3, 4),  
    new Vector(5, 6, 7, 8),  
    new Vector(9, 10, 11, 12));
```

// 生成一个4×4的单位矩阵

```
Matrix m2 = Matrix.Identity(4);
```

// 矩阵的行、列数

```
int r = m.RowCount, c = m.ColumnCount;
```

// 对矩阵的某个元素赋值

```
m[1, 2] = -1;
```

// 对矩阵的某行操作

```
Vector v = m.GetRow(0);
```

```
m.SetRow(0, new Vector(4, true));
```

// 对矩阵的某列操作

```
v = m.GetColumn(1);
```

```
m.SetColumn(1, new Vector(3, true) * 4);
```

// 矩阵的正负

```
Matrix m3 = +m;
```

```
m3 = -m;
```

// 矩阵加减乘除

```
m3 = m + m3;
```

```
m3 = m - m3;
```

```
m3 = 1.2 * m * 1.2;
```

```
m3 = m / 3;
```

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

30/81

✓ Matrix类使用指南

// 执行对应元素的乘法、除法

```
m3 = m.Multiply(m3);
```

```
m3 = m.Divide(m3);
```

// 矩阵相乘

```
m3 = m * m2;
```

// 矩阵乘向量，矩阵在左视为列向量，

// 矩阵在右视为行向量

```
v = m * new Vector(4, true);
```

```
v = new Vector(3, true) * m;
```

// 矩阵转置

```
m3 = m.Transpose();
```

// 矩阵各元素是否均相等

```
m.Equals(m3);
```

// 拷贝矩阵到一个新对象

```
m3 = m.Copy();
```

// 矩阵横向拼接，被拼接矩阵行数相同

```
var m4 = m.Concat(m);
```

// 矩阵纵向拼接，被拼接矩阵列数相同

```
m4 = m.Concat(m2, true);
```

// 截取子矩阵

```
m4 = m4.SubRows(0, 3);
```

```
m4 = m4.SubColumns(1, 4);
```



注意编程中索引从0开始，第k个元素的索引为(k-1)!!!

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

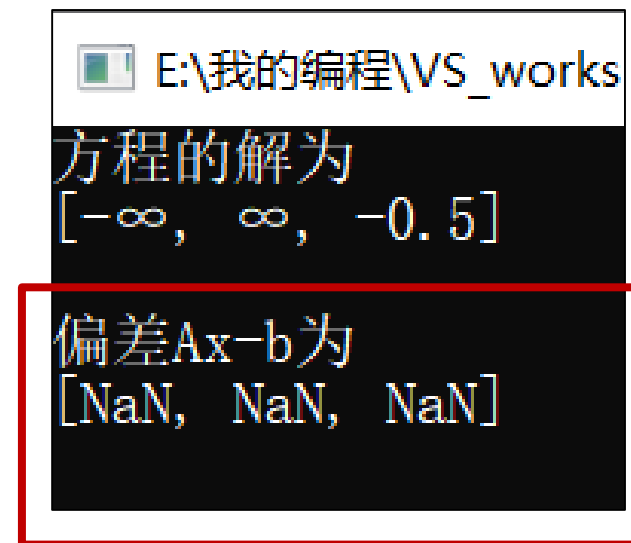
31/81

✓ 实现Gauss消去法

- 在NumNet项目中添加一个名为LinearEquations的空文件夹
- 在该文件夹中添加网络学堂下载的GaussElimination类文件
- 将Program中的Main函数改成如下内容

```
public class Program
{
    public static void Main(string[] args)
    {
        GaussElimination.Sample();

        Console.ReadKey();
    }
}
```



- 运行发现输出结果有误，请补全GaussElimination.Solve方法

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

32/81

✓ GaussElimination类解读 (Sample方法)

```
public static void Sample()
{
    Matrix A = new Matrix(new double[,] {
        { 2, 1, -2 },
        { 4, 0, -1 },
        { 0, 3, 2 }
    });

    Vector b = new Vector(1, 7, -1);

    Vector x = Solve(A, b);
    Console.WriteLine("\n偏差Ax-b为");
    Console.WriteLine(A * x - b);
}
```

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b = [1 \quad 7 \quad -1]^T$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_3 = 7 \\ 3x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

调用Solve方法求解 $Ax = b$

然后计算 $Ax - b$ 的值 (理论上为0向量)

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

32/81

✓ GaussElimination类解读 (Solve方法)

```
public static Vector Solve(Matrix MatA, Vector VecB)
```

```
{
```

```
// .....
```

```
var Ab = MatA.Concat(new Matrix(VecB).Transpose());
```

构造增广矩阵

```
for (int i = 0; i < Ab.RowCount - 1; i++)
```

```
{
```

```
// 此处请同学们根据高斯消去法填补缺失代码
```

```
Console.WriteLine("\n第" + (i + 1) + "次消去后: \n" + Ab);
```

```
}
```

```
// .....
```

```
}
```

将增广矩阵消去成上三角增广矩阵

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

34/81

✓ GaussElimination类解读 (Solve方法)

```
public static Vector Solve(Matrix MatA, Vector VecB)
```

```
{
```

```
// .....
```

```
Vector x = new Vector(Ab.RowCount);
```

```
Matrix ATri = Ab.SubColumns(0, Ab.ColumnCount - 1);
```

```
for (int i = Ab.RowCount - 1; i >= 0; i--)
```

```
{
```

```
    x[i] = (Ab[i, Ab.ColumnCount - 1] - ATri.GetRow(i) * x) / Ab[i, i];
```

```
}
```

```
return x; // .....
```

```
}
```

用于存储解向量 x , 初始化为零向量

提取增广矩阵中的上三角部分 (去掉最后一列)

从后往前逐个求解 x 的元素

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b_2$$

例: 求解 x_2 的过程 (x_3 、 x_4 已求)

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = b_2 - a_{22}x_2$$

列主元消去法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

35/81

假定已经完成 $k-1$ 步消元 $[\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(k)} =$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2k}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} & b_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(k+1)} = \mathbf{L}_k^{-1} \mathbf{I}_{s \leftrightarrow k} [\mathbf{A}|\bar{\mathbf{b}}]^{(k)}$$

在其中挑出最大元和 a_{kk} 换行

定理2.2.3 (教材编号)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, 则存在**排列阵** $\mathbf{P}$, 单位下三角阵 $\mathbf{L}$ 和上三角矩阵 $\mathbf{U}$, 满足: $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{I}_{\leftrightarrow n-1} \cdots \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{I}_{\leftrightarrow 2} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{I}_{\leftrightarrow 1} \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{P} = \mathbf{I}_{\leftrightarrow n-1} \cdots \mathbf{I}_{\leftrightarrow 2} \mathbf{I}_{\leftrightarrow 1}$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

36/81

定理2.2.2 (教材编号)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $\det(\mathbf{A}) \neq 0, \Delta_i \neq 0$, 则存在唯一的单位下三角矩阵 $\mathbf{L}$ 和上三角矩阵 $\mathbf{U}$, 满足: $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$

1. 如前所述的高斯消去过程已经证明了存在性
2. 唯一性: 反证法, 假定不是唯一的, 则

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \mathbf{U}_1 = \mathbf{L}_2 \mathbf{U}_2 \Rightarrow \mathbf{L}_1^{-1}(\mathbf{L}_1 \mathbf{U}_1) \mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{L}_1^{-1}(\mathbf{L}_2 \mathbf{U}_2) \mathbf{U}_2^{-1} \Rightarrow \boxed{\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^{-1}} = \boxed{\mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{L}_2}$$

只能满足 $\mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2^{-1} = \mathbf{I}$

这称作矩阵的**三角分解**或者**LU分解** (或者Doolittle分解)

$\mathbf{U}$ 还能再分解为一个对角阵和一个单位上三角阵, 称为**LDU分解**

矩阵的三角分解



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

37/81

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{L}_{n-2}^{-1} \cdots \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{L}_{n-1}^{-1} \mathbf{L}_{n-2}^{-1} \cdots \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{L}_1^{-1} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \cdots \mathbf{L}_{n-2} \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{U} = \mathbf{L} \mathbf{U} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{U}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & \cdots & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & 1 & \cdots & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D} \tilde{\mathbf{U}}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} & b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

U

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

38/81

- 理解**克莱姆法则**求解非齐次线性方程组
- 掌握矩阵的**行列式**的性质和方阵的**逆**，及**手算方法**
- 理解**高斯消去法**的思想和计算方法
- 掌握**列主元消去法**的思想和计算方法

作业

- 1、教材P37-17、 P62-1
- 2、教材P64-2（注：不用输出A的条件数）

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

2.1 概论及背景知识回顾

2.2 高斯消去法

2.3 直接三角分解法

2.4 理论问题

2.5 编程实践（穿插在两周中）

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

40/81

- 对于方程 $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ 我们可以对增广矩阵 $[\mathbf{A} | \vec{b}]$ 做高斯消去得到方程: $\mathbf{A}^{(n)}\vec{x} = \vec{b}^{(n)}$, 再回代进行求解
- 高斯消去法有很多变形: 改写、改进或用于特殊矩阵
- 如可以只对矩阵 $\mathbf{A}$ 进行LU分解: $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ 再求解方程

$$\mathbf{LU}\vec{x} = \vec{b} \quad \mathbf{L}_1\mathbf{L}_2\cdots\mathbf{L}_{n-2}\mathbf{L}_{n-1}\mathbf{U} = \mathbf{LU} = \mathbf{A}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{b}$$

Doolittle分解



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

$$\mathbf{LU}\vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \vec{x} = \vec{b}$$

L/U和高斯消去的关系?



1. 先求 $\mathbf{L}\vec{y} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$y_i = b_i - \sum_{r=1}^{i-1} l_{ir} y_r \quad i \text{ 是行号, 列从 1 到 } i-1 \text{ 为止}$$

2. 再求 $\mathbf{U}\vec{x} = \vec{y}$

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{r=i+1}^n u_{ir} x_r \right) \quad \text{列从 } i+1 \text{ 到 } n \text{ 为止}$$

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

41/81

追赶法 (Thomas方法)



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

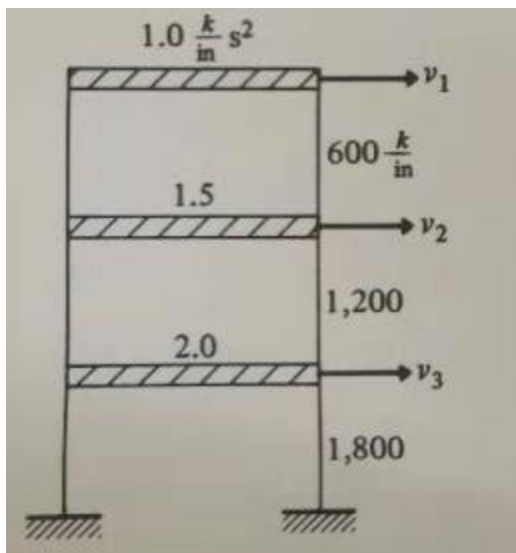
范数

条件数

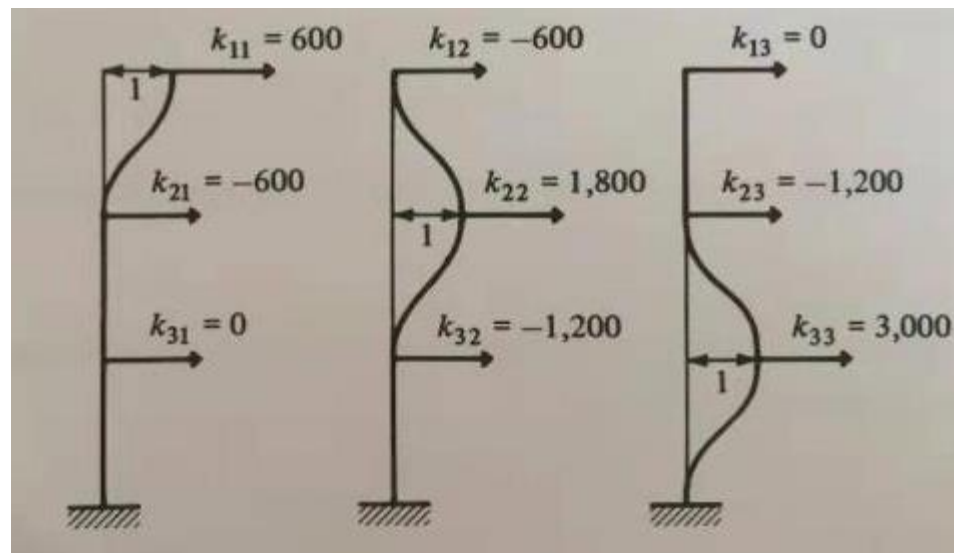
编程实践

42/81

- ✓ 一个三层框架结构，已知层间刚度，求侧向力下的位移



$$\frac{k}{in} s^2 \approx 39370 kg$$



k_{ij} 为第 j 个节点的单位位移引起第 i 个节点的外力

求侧向力 $\vec{F}$ 下的位移

$$\mathbf{K}\vec{\delta} = \vec{F}$$



$$\vec{\delta} = ?$$

$$\mathbf{K} = 600 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

整体刚度矩阵

整体刚度矩阵的特点：

对称性、稀疏性、带状性

如果单元节点编号合理：

可以确保为正定**三对角阵**

追赶法 (Thomas方法)



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

对于方程 $\mathbf{A}\bar{x} = \bar{d}$, 若可以写成 $a_i x_{i-1} + b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, i = 1, 2, \dots, n$
即 $\mathbf{A}$ 为三对角矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

第 i 行乘第 i 列
第 i 行乘第 $i-1$ 列

$$\text{分解过程: } u_1 = b_1 \Rightarrow l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}, i = 2, 3, \dots, n \Rightarrow u_i = b_i - l_i c_{i-1}$$

是高斯消去 (LU分解) 的一个特例, 因而只需满足定理2.2.1

追赶法 (Thomas方法)



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

44/81

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

方程求解过程

1. 先求 $L\bar{y} = \bar{d}$

$$\begin{cases} y_1 = d_1 \\ y_i = d_i - l_i y_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

2. 再求 $U\bar{x} = \bar{y}$

$$\begin{cases} x_n = \frac{y_n}{u_n} \\ x_i = \frac{1}{u_i} (y_i - c_i x_{i+1}), i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

45/81

定义2.3.1 (教材编号1.6.10)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$, 若存在排列阵 $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 使得

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \text{ 方阵} \text{ 则称 } \mathbf{A} \text{ 为可约矩阵; 否则为不可约矩阵}$$

定义2.3.2 (教材编号1.6.11)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 $|a_{ii}| > \sum_{j=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$, 称 $\mathbf{A}$ 为 **严格对角占优矩阵**

若 $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, i = 1, 2, \dots, n$, 且至少有一个严格不等号, 称 $\mathbf{A}$ 为 **弱对角占优矩阵**

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

46/81

定理2.3.1 (教材编号1.6.12)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 若 $\mathbf{A}$ 为严格对角占优矩阵或为不可约弱对角占优矩阵, 则

$$a_{ii} \neq 0, n = 1, 2, \dots, n \quad \text{且} \mathbf{A} \text{非奇异} \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

定理2.3.2 (教材编号2.3.1)

若三对角阵 $\mathbf{A}$ 满足

$$\begin{cases} |b_1| > |c_1| > 0 \\ |b_i| \geq |a_i| + |c_i|, a_i c_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ |b_n| > |a_n| > 0 \end{cases}$$

弱对角占优, 不可约!

则 $\mathbf{A}$ 非奇异, 且追赶过程中

$$\begin{cases} u_i \neq 0 \\ 0 < \frac{|c_i|}{|u_i|} < 1 \\ |b_i| - |a_i| < |u_i| < |b_i| + |a_i| \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

稳定的算法!

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

47/81

对称矩阵

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 记作: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, 或 $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$

对称正定矩阵

在对称的基础上, 进一步满足

$(\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} > 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$ 则称A **对称正定**

⇒ A的全部特征值为正, A的所有顺序主子式大于零

若 $(\mathbf{A}\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} \geq 0, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$, 则称A **对称非负定** 或 **对称半正定**

Cholesky分解—对称正定矩阵



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

48/81

定理2.3.3 (教材编号2.3.2)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 若 $\mathbf{A}$ 对称, 且 $\mathbf{A}$ 的顺序主子式 $\Delta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则存在唯一的单位下三角矩阵 $\mathbf{L}$ 和对角矩阵 $\mathbf{D}$, 使得: $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & \cdots & u_{1n}/u_{11} \\ & 1 & \cdots & u_{2n}/u_{22} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{U}}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{U}} \quad \mathbf{A}^T = \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{D}\mathbf{L}^T \Rightarrow \mathbf{A} \text{ 对称, 且LU分解是唯一的}$$

所以: $\mathbf{L}^T = \tilde{\mathbf{U}}$

Cholesky分解—对称正定矩阵



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆
高斯消去法
常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

49/81

定理2.3.4 (教材编号2.3.3)

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 若 $\mathbf{A}$ **对称正定**，则存在唯一的对角元素为正的下三角矩阵 $\mathbf{L}$ ，使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$$

对称正定矩阵的Cholesky分解，也称**Cholesky分解定理**

由上一定理可知： $\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \mathbf{D} \mathbf{L}_1^T$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$$

$$\Delta_k = \det(\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_k)) > 0$$

$$\mathbf{D}^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}_1 \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{D}^{\frac{1}{2}} \mathbf{L}_1^T$$



$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \mathbf{D}^{\frac{1}{2}}$$

Cholesky分解—平方根法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

50/81

分解过程

都乘第一列

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix}$$

每一行
第*i*行

*j*列

都乘第*j*列

只用 $\mathbf{A}$ 的半部分元素

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad l_{i1} = \frac{a_{i1}}{l_{11}}, i = 2, 3, \dots, n$$

假定已经计算到*j*-1列

意味着*i=j*列只剩下对角元 l_{jj}

首先用*j*行乘*j*列计算出 l_{jj}

$$a_{jj} = l_{jj}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2 \Rightarrow l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

然后考虑所有*i>j*行，还是乘 *j* 列

$$a_{ij} = l_{ij} l_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}$$

对称

l_{kj} 是未知数

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right)$$

Cholesky分解—平方根法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

51/81

方程求解过程

$$\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ & l_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & l_{n,n-1} \\ & & & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

第一步

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \\ y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k \right) \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots, n$$

第二步

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{l_{nn}} \\ x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(y_i - \sum_{k=i+1}^n l_{ki} x_k \right) \end{cases} \quad i = n-1, \dots, 1$$

Cholesky分解—另一种Cholesky方法



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

52/81

若**A对称正定**，则A的 $n-1$ 阶**顺序主子矩阵**也是**对称正定**的

$$\text{记: } \mathbf{A}_{n-1} = \mathbf{L}_{n-1} \mathbf{L}_{n-1}^T$$

显然: $\mathbf{L}_1 = [l_{11}], a_{11} = l_{11}^2$

将 i 阶子阵 $\mathbf{A}_i$ 分块处理

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i-1} & \bar{\mathbf{c}} \\ \bar{\mathbf{c}}^T & \bar{a}_{ii} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_i \mathbf{L}_i^T = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{i-1} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{h}^T & l_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{i-1}^T & \bar{h} \\ \bar{\mathbf{0}} & l_{ii} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{i-1} = \mathbf{L}_{i-1} \mathbf{L}_{i-1}^T \quad \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{L}_{i-1} \bar{h} \quad a_{ii} = \bar{h}^T \bar{h} + l_{ii}^2$$

当已知 $n-1$ 阶时，先求解 $\bar{h}$, $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{L}_{i-1} \bar{h}$ ，再计算: $l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \bar{h}^T \bar{h}}$ ，即可递推至 n 阶

适合**稀疏矩阵**、**带状矩阵**等

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

2.1 概论及背景知识回顾

2.2 高斯消去法

2.3 直接三角分解法

2.4 理论问题

2.5 编程实践（穿插在两周中）

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

54/81

定义2.4.1 (教材第19页)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ or } \mathbb{C}^{n \times n}$ 若存在 $\lambda \in \mathbb{C}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ or } \mathbb{C}^n, \vec{x} \neq 0$ 满足: $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$, 则称 λ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值, $\vec{x}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量; 求 λ 和 $\vec{x}$ 的问题成为矩阵的特征值问题

$$\text{特征多项式} \quad \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad \text{特征方程}$$

n 阶多项式, 有 n 个根组成特征值 (实或复、可重复) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 这些特征值的集合称为 $\mathbf{A}$ 的**谱**, 记 $\sigma(\mathbf{A})$; $\rho(\mathbf{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{A})} |\lambda|$ 为**谱半径**

$$\text{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{nn} \quad \text{迹} \quad \text{tr} \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \det \mathbf{A} = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

55/81

定义2.4.2（教材第20页）：特征值相关的几个定义

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ or } \mathbb{C}^{n \times n}$ ，若存在同阶可逆方阵 $\mathbf{P}$ ，使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$ ，则称矩阵**A和B相似**

若**A**和一个对角矩阵 $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ 相似，则称**A**可以通过相似变化为对角矩阵，简称**A可对角化**

若特征方程中有 n_i 个重复的根 λ_i ，则称 n_i 为特征值 λ_i 的**代数重数**

设 λ_i 对应的最大线性无关特征向量的个数为 m_i ， m_i 应是线性齐次方程组 $(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})\bar{x} = 0$ 的基础解系所含的最大线性无关解个数，称为 λ_i 的**几何重数**

矩阵的特征值—相关定理 (教材P20-P21)



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆
高斯消去法
常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解
直接三角分解法
Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

56/81

$\mathbf{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\mathbf{A}$ 有 **n 个线性无关的特征向量**

如果 $\mathbf{A}$ 是**实对称矩阵**，则其特征值都是实数，且可对角化

若 $\mathbf{A}$ 有 **n 个不同的特征值** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ，即 $\mathbf{A}$ 的特征方程的根都是**单重根**，则 $\mathbf{A}$ 可对角化

若 $\mathbf{A}$ 有相同的特征值，则 $\mathbf{A}$ 可对角化的充分必要条件是每一个特征值 λ_i 的**几何重数和代数重数相等**

矩阵的特征值—相关定理 (教材P20-P21)



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

57/81

以上都不满足, 即 $\mathbf{A}$ 有重根特征值, 且其几何重数与代数重数不等的情况下

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \\ & \mathbf{J}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_s \end{bmatrix}$$

Jordan标准型

$\mathbf{J}_i$ 对应特征值 $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, s$, n_i (代数重数) 阶

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{i1} & & \\ & \mathbf{J}_{i2} & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{J}_{im_i} \end{bmatrix}$$

Jordan子阵

m_i 为几何重数 λ_i

$$\mathbf{J}_{ik} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Jordan块

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积
范数
条件数

编程实践

58/81

定义2.4.3 (教材编号1.6.1)

设数域 P , 非空集合 V , 在 V 上定义运算

1. 加法: $u, v \in V$, 存在唯一元素记作 $u+v \in V$, 且满足

$$u+v=v+u \quad u+(v+w)=(u+v)+w \quad u+0=u \quad u+(-u)=0$$



零元素

$$\forall u, v, w \in V$$

2. 数乘: $\alpha \in P, u \in V$, 存在唯一的元素记作 $\alpha u \in V$, 且满足

$$1u=u \quad \alpha(\beta u)=(\alpha\beta)u \quad \alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v \quad (\alpha+\beta)u=\alpha u+\beta u$$

$$\forall u, v \in V, \alpha, \beta \in P$$

称 V 为一个数域 P 上的**线性空间**

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

59/81

定义2.4.4 (教材编号1.6.2)

设 V 是数域 P 上定义的线性空间, 定义 $V \times V \rightarrow P$ 的一个映射, 即 V 中任意元素对 u 和 v , 有 P 中唯一的一个数记作 (u, v) 与之对应, 且满足

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w), \quad \forall u, v, w \in V$$

$$(\alpha u, v) = \alpha (u, v), \quad \forall u, v \in V, \alpha \in P$$

$$(u, v) = \overline{(v, u)}, \quad \forall u, v \in V \text{ 共轭, 实数域直接对称 } (u, v) = 0 \text{ 正交}$$

$$(u, u) \geq 0, \quad \forall u \in V \text{ 且 } (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

则称 (u, v) 为 u 与 v 的**内积**, 定义了内积的线性空间成为**内积空间**

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间

内积

范数
条件数

编程实践

60/81

Cauchy-Schwarz不等式 (教材编号1.6.5)

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u)(v, v), \quad \forall u, v \in V$$

Gram矩阵 (教材编号1.6.6)

$\forall u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ Gram矩阵非奇异的充
要条件是 u_i 线性无关

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) & \cdots & (u_n, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) & \cdots & (u_n, u_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (u_1, u_n) & (u_2, u_n) & \cdots & (u_n, u_n) \end{bmatrix}$$

Gram-Schmidt正交化 (教材编号1.6.7)

如上所述的一组线性无关元素, 按照如下
计算生成一组正交元素序列 v_i

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_i = u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(v_i, u_k)}{(v_k, v_k)} v_k, i = 2, 3, \dots, n \end{cases}$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间

内积

范数
条件数

编程实践

向量的内积

$$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \quad (\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \vec{y}^T \vec{x}$$

也可以定义带权重的内积 $(\vec{x}, \vec{y})_w = \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i$

函数的内积

$$f, g \in C[a, b]$$

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx \quad (f, g)_\rho = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积

范数

条件数

编程实践

62/81

定义2.4.5 (教材编号1.6.4)

设 V 是数域 P 上定义的线性空间, 定义 $V \rightarrow \mathbb{R}$ 的一个映射, 记作 $\|\cdot\|$, 并且满足

1. 正定性 $\|u\| \geq 0$, $\forall u \in V$, 且 $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. 齐次性 $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$, $\forall u \in V, \alpha \in P$
3. 三角不等式 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in V$

则称 $\|\cdot\|$ 为 V 上的**范数**, 定义范数的线性空间为**赋范线性空间**

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{1-范数}$$
$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \infty\text{-范数}$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}$$

2-范数 内积导出的范数

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积

范数

条件数

编程实践

63/81

定义2.4.6 (教材编号1.6.5)

设线性空间 V 上定义了范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$, 若存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使

$$C_1 \|u\|_\alpha \leq \|u\|_\beta \leq C_2 \|u\|_\alpha, \quad \forall u \in V$$

则称 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是 V 上**等价的范数**

可以证明

在有限维线性空间上定义的各种范数都是相互等价的

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \sqrt{n} \|\vec{x}\|_\infty$$

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n \|\vec{x}\|_\infty$$

$$\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\vec{x}\|_2$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积

范数

条件数

编程实践

64/81

定义2.4.7 (教材编号1.6.6)

$\mathbb{R}^{n \times n}$ 的范数是 $\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ 的一个映射, 即对于 $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 有 $\|\mathbf{A}\|$ 满足

$$1. \|\mathbf{A}\| \geq 0, \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \text{且 } \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$2. \|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha| \|\mathbf{A}\|, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3. \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$4. \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|, \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

相容条件

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)}$$

称 $\|\mathbf{A}\|$ 为矩阵 $\mathbf{A}$ 的 **范数**

矩阵 $\mathbf{A}$ 的 **Frobenius 范数**, 可以看作 n^2 维向量的 2-范数

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积

范数

条件数

编程实践

65/81

定义2.4.8 (教材编号1.6.7)

对于 $\mathbb{R}^n$ 上给定的向量范数 $\|\vec{x}\|$ 与 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 上给定的一种矩阵范数 $\|\mathbf{A}\|$,

如果 $\|\mathbf{A}\vec{x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\vec{x}\|, \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

则称上述向量范数和矩阵范数**相容**

$\mathbb{R}^n$ 定义范数后, 考虑一个集合 $D = \{\vec{x} | \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \|\vec{x}\| = 1\}$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|\mathbf{A}\vec{x}\|$ 是一个关于 $\vec{x}$ 的连续函数, 所以 **单位超球面!**
在 D 上必有最大值, 即存在 $x_0 \in D$, 使得 $\|\mathbf{A}\vec{x}_0\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|\mathbf{A}\vec{x}\|$

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0, \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \left\| \mathbf{A} \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \right\| \Rightarrow \text{必有最大值 } \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|\mathbf{A}\vec{x}\|$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积

范数

条件数

编程实践

66/81

定理2.4.1 (教材编号1.6.8)

就上述的最大值, 定义

$$\|A\| = \max_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|$$

是矩阵的一种范数

$$\frac{\|A\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \leq \|A\| \text{ 满足相容条件}$$

再考虑范数的条件, (1) 和 (2) 是显然的; 只证明 (3)

$$\|(A + B)\vec{x}\| = \|A\vec{x} + B\vec{x}\| \leq \|A\vec{x}\| + \|B\vec{x}\| \leq (\|A\| + \|B\|)\|\vec{x}\|$$

$$\|A + B\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|(A + B)\vec{x}\| \leq \|A\| + \|B\|$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆
高斯消去法
常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解
直接三角分解法
Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

67/81

定义2.4.9 (教材编号1.6.8)

对 $\mathbb{R}^n$ 上给定的向量范数 $\|\vec{x}\|$, 由如上定义给定的一种矩阵范数 $\|\mathbf{A}\|$, 称为从属于给定向量范数的矩阵范数, 或称**从属范数**(算子范数)

单位阵的任意从属范数都为1, $\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|\mathbf{A}\vec{x}\|$

推论: 按照F-范数的定义, 2阶以上时 $\|\mathbf{A}\|_F$ 不是从属范数

那么如何定义从属范数 $\|\mathbf{A}\|_\infty, \|\mathbf{A}\|_1, \|\mathbf{A}\|_2$



定理2.4.2 (教材编号1.6.9)

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}$$

按**行**绝对和的最大值

按**列**绝对和的最大值

范数—从属范数



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第二章

概论

研究问题

矩阵的行列式

克莱姆法则

行列式性质

方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵

矩阵的初等变换

顺序消去法

列主元消去法

矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解

追赶法

Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值

线性空间

内积

范数

条件数

编程实践

68/81

证明一下 $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$

假定按照行绝对和的最大值在第 k 行取得: $\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|$

一方面: $\|\mathbf{A}\vec{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \|\vec{x}\|_\infty \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \mu \|\vec{x}\|_\infty$

向量范数

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty=1} \|\mathbf{A}\vec{x}\|_\infty \leq \mu$$

另一方面, 构造 $\vec{x}^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T$, $x_j^{(0)} = \begin{cases} 1 & a_{kj} \geq 0 \\ -1 & a_{kj} < 0 \end{cases}$

显然, $\|\vec{x}^{(0)}\| = 1$ $\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{\|\vec{x}\|_\infty=1} \|\mathbf{A}\vec{x}\|_\infty \geq \|\mathbf{A}\vec{x}^{(0)}\|_\infty \geq \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j^{(0)} \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}| = \mu$

只能取等号!

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积

范数

条件数

编程实践

69/81

定理2.4.3 (教材编号1.6.10)

谱半径和范数的关系, $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\rho(\mathbf{A}) \leq \|\mathbf{A}\|$

至少存在一种从属矩阵范数满足: $\|\mathbf{A}\| \leq \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon, \varepsilon > 0$

证明

假定 $|\lambda| = \rho(\mathbf{A})$, 且 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ 是其对应的特征向量, $\mathbf{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$ ($\vec{x} \neq 0$)

则一定存在向量 $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, 使得 $\vec{x}\vec{y}^T$ 不是 $\mathbf{0}$ 矩阵 (例如 $\vec{y} = \vec{e}_1$)

$$\rho(\mathbf{A}) \|\vec{x}\vec{y}^T\| = |\lambda| \|\vec{x}\vec{y}^T\| = \|\lambda\vec{x}\vec{y}^T\| = \|\mathbf{A}\vec{x}\vec{y}^T\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\vec{x}\vec{y}^T\|$$

矩阵范数性质2

矩阵范数性质4

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积

范数

条件数

编程实践

70/81

定理2.4.3 (教材编号1.6.11)

设 $\|\mathbf{A}\|$ 是矩阵的从属范数, 矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\|\mathbf{B}\| < 1$, 则 $\mathbf{I} + \mathbf{B}$ 非奇异, 且

$$\|(\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{B}\|}$$

终于获得了今天需要的工具!

若 $\mathbf{I} + \mathbf{B}$ 奇异, 则存在 $\vec{x} \neq 0, (\mathbf{I} + \mathbf{B})\vec{x} = 0$, 显然这需要 $\mathbf{B}$ 有一个特征值为 -1

根据以上定理 $\rho(\mathbf{B}) + \varepsilon \geq \|\mathbf{B}\| \geq \rho(\mathbf{B}) \geq 1$ 和前提假设矛盾!

记 $\mathbf{D} = (\mathbf{I} + \mathbf{B})^{-1}$

$$1 = \|\mathbf{I}\| = \|(\mathbf{I} + \mathbf{B})\mathbf{D}\| = \|\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{D}\| \geq \|\mathbf{D}\| - \|\mathbf{B}\|\|\mathbf{D}\| = \|\mathbf{D}\|(1 - \|\mathbf{B}\|)$$

以上, 换成 $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ 也成立

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

71/81

定义2.4.10 (教材编号2.4.1)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, 对于任何一种从属范数 $\|\mathbf{A}\|$, 记

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$$

称为矩阵 $\mathbf{A}$ 的**条件数**

$$(1) \quad \text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{I}\| = 1$$

$$(2) \quad \text{cond}(\alpha \mathbf{A}) = \text{cond}(\mathbf{A})$$

$$(3) \quad \text{若} \mathbf{A} \text{ 为正交矩阵, 则 } \text{cond}(\mathbf{A})_2 = 1$$

$$(4) \quad \text{若} \mathbf{U} \text{ 为正交矩阵, 则 } \text{cond}(\mathbf{A})_2 = \text{cond}(\mathbf{A}\mathbf{U})_2 = \text{cond}(\mathbf{U}\mathbf{A})_2$$

$$(5) \quad \text{设} \mathbf{A} \text{ 有按模排列的最大最小特征值 } \lambda_1, \lambda_n, \text{ 则: } \text{cond}(\mathbf{A}) \geq \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$$

$\mathbf{A}$ 对称, 等号成立!

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

定理2.4.4 (教材编号2.4.1)

范数可以是任意一种向量范数及矩阵从属范数

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, 方程产生微小的扰动满足

$$\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} \quad (\mathbf{A} + \delta\mathbf{A})(\bar{\mathbf{x}} + \delta\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{b}} + \delta\bar{\mathbf{b}} \quad \frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} < \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})}$$

则:

$$\frac{\|\delta\bar{\mathbf{x}}\|}{\|\bar{\mathbf{x}}\|} \leq \frac{\text{cond}(\mathbf{A})}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|} \left(\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} + \frac{\|\delta\bar{\mathbf{b}}\|}{\|\bar{\mathbf{b}}\|} \right)$$

$$\frac{\|\delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} < \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})} \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\| < 1 \Rightarrow \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\| < 1 \quad \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A})$$

上一定理

$$\left\| (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A})^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\delta\mathbf{A}\|} \leq \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\delta\mathbf{A}\|} \Rightarrow \mathbf{A} + \delta\mathbf{A} \text{ 可逆}$$

矩阵的条件数



概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

73/81

$$\begin{aligned}\bar{x} + \delta \bar{x} &= (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1} (\bar{b} + \delta \bar{b}) \Rightarrow \delta \bar{x} = (\mathbf{A} + \delta \mathbf{A})^{-1} [\cancel{\bar{b}} + \delta \bar{b} - (\cancel{\mathbf{A}} + \delta \mathbf{A}) \cancel{\bar{x}}] \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{A}^{-1} \delta \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{-1} [\delta \bar{b} - (\delta \mathbf{A}) \bar{x}]\end{aligned}$$

$$\|\delta \bar{x}\| \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1 - \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\delta \mathbf{A}\|} \left[\frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \|\mathbf{A}\| \|\bar{x}\| + \frac{\|\delta \bar{b}\|}{\|\bar{b}\|} \|\mathbf{A}\| \|\bar{x}\| \right]$$

得证!

若 $\delta \mathbf{A} = 0, \delta \bar{b} \neq 0$

$$\frac{\|\delta \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\delta \bar{b}\|}{\|\bar{b}\|}$$

若 $\delta \mathbf{A} \neq 0, \delta \bar{b} = 0$

$$\frac{\|\delta \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\delta \mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} [1 + O(\|\delta \mathbf{A}\|)]$$

无论哪种情况，都可看出 $\text{cond}(\mathbf{A})$ 是相对误差得放大倍数!

$\text{cond}(\mathbf{A})$ 越大方程越病态!

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数

条件数

编程实践

74/81

定理2.4.5 (教材编号2.4.2)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$, $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ 有精确解 x , 其近似解 $\tilde{x}$ 对应的剩余向量 $\vec{r} = \vec{b} - \mathbf{A}\tilde{x}$

$$\text{则 } \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})} \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \leq \frac{\|\tilde{x} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \text{cond}(\mathbf{A}) \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|}$$

相对误差的范围

$$\mathbf{A}\bar{x} = \vec{b} \quad \mathbf{A}\tilde{x} = \vec{b} - \vec{r} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} - \bar{x} = -\mathbf{A}^{-1}\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{x} - \bar{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\vec{r}\|$$



$$\|\vec{b}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\bar{x}\| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\|\bar{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}\|}{\|\vec{b}\|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\|\tilde{x} - \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \quad \text{右侧得证}$$

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

2.1 概论及背景知识回顾

2.2 高斯消去法

2.3 直接三角分解法

2.4 理论问题

2.5 编程实践（穿插在两周中）

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

76/81

✓ 通过Cholesky（平方根法）求解线性方程组

- 在LinearEquations中添加网络学堂下载的Cholesky类文件
- 将Program中的Main函数改成如下内容

```
public class Program
{
    public static void Main(string[] args)
    {
        Cholesky.Sample();

        Console.ReadKey();
    }
}
```

- 运行发现程序报错，请补全Cholesky.Factorize和Cholesky.Solve方法

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

77/81

✓ Cholesky类解读 (Sample)

```
public static void Sample()
```

```
{
```

```
    Matrix A = new Matrix(new double[,] {  
        { 1, 1, 1, 1, 1 },  
        { 1, 2, 3, 4, 5 },  
        { 1, 3, 6, 10, 15 },  
        { 1, 4, 10, 20, 35 },  
        { 1, 5, 15, 35, 70 }  
    });
```

Pascal矩阵, 对称正定

```
    Matrix L = Factorize(A);  
    Console.WriteLine("L\n" + L + "\n");
```

调用Factorize方法,
分解得到L矩阵

```
    Matrix U = L.Transpose();  
    Console.WriteLine("A-L*LT\n" + (A - L * U) + "\n");  
    // .....
```

计算 $A - L * L^T$, 按照Cholesky方法,
应得到零矩阵

```
}
```

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

78/81

✓ 求矩阵的条件数（定义范数）

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

- 在Base中添加网络学堂下载的Norm类文件
- Norm类中实现了求向量的1-范数、2-范数、 ∞ -范数
- 以及求矩阵的1-范数、 ∞ -范数、Frobenius范数

```
public static double One(Vector v);  
public static double Two(Vector v);  
public static double Infinity(Vector v);
```

例如调用

`Norm.One(matrix)`

得到矩阵的1-范数

```
public static double One(Matrix m);  
public static double Infinity(Matrix m);  
public static double Frobenius(Matrix m);
```

- 矩阵的2-范数涉及矩阵的特征值求解，在之后的章节会进一步实现

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

79/81

✓ 求矩阵的条件数

- 在LinearEquations中添加网络学堂下载的ConditionNumber类
- 以矩阵的1-条件数为例说明

```
public static double One(Matrix m)
```

```
{
```

```
    Matrix mInv = GaussElimination.Inverse(m);
```

→ 计算逆矩阵mInv

```
    if (mInv is null)
```

```
        return double.PositiveInfinity;
```

→ 当矩阵奇异时，mInv为null，
此时直接返回无穷大

```
    return Norm.One(m) * Norm.One(mInv);
```

→ 其他情况下按定义计算

```
}
```

注：奇异矩阵的条件数为无穷大

□ 教材P63-9, P64-11

□ 证明教材定理P59-2.4.2左侧不等式
$$\frac{1}{\text{cond}(\mathbf{A})} \frac{\|\vec{r}\|}{\|\vec{b}\|} \leq \frac{\|\tilde{x} - \vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$$

□ 编程题(源自教材P65-5): 生成不同阶数的Hilbert矩阵, 用本次课堂上的程序计算其逆 (Inverse), 并计算其逆的1范数, 以及1-10阶矩阵的对应的条件数。选一个阶数的Hilbert矩阵生成一个线性方程组, 用你上周的Gauss消去程序验证其在 $\mathbf{A}$ 或者 b 有微小扰动时, 解 x 的特性如何? 讨论与条件数是否匹配

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \ddots & & \frac{1}{n+1} \\ 2 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

Hilbert矩阵

概论

研究问题
矩阵的行列式
克莱姆法则
行列式性质
方阵的逆

高斯消去法

常见矩阵
矩阵的初等变换
顺序消去法
列主元消去法
矩阵的三角分解

直接三角分解法

Doolittle分解
追赶法
Cholesky分解

理论问题

矩阵的特征值
线性空间
内积
范数
条件数

编程实践

81/81

- 理解使用 **LU** (Doolittle) 方法求解非齐次线性方程组，以及与Gauss消元法的关系，和相应变形的关系
- 掌握 **Cholesky分解** 的要求和计算方法
- 理解 **线性空间**、**内积** 的概念
- 掌握矩阵的 **特征值**、**范数** 和 **条件数** 的概念
- 理解求解方阵行列式、方阵的逆等相关问题的 **编程**