



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School

工程硕士数学

第四章 非线性方程（组）的数值解法

胡振中 副教授

海洋大楼 702-3, 15999640239 (微信同号)

邮箱: huzhenzhong@tsinghua.edu.cn

个人网站: <http://www.huzhenzhong.net>

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

4.1 概论及背景知识

4.2 二分法

4.3 不动点迭代法

4.4 迭代加速

4.5 牛顿迭代法

4.6 非线性方程组的数值解法

4.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

本章研究的问题



概论

研究问题

代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

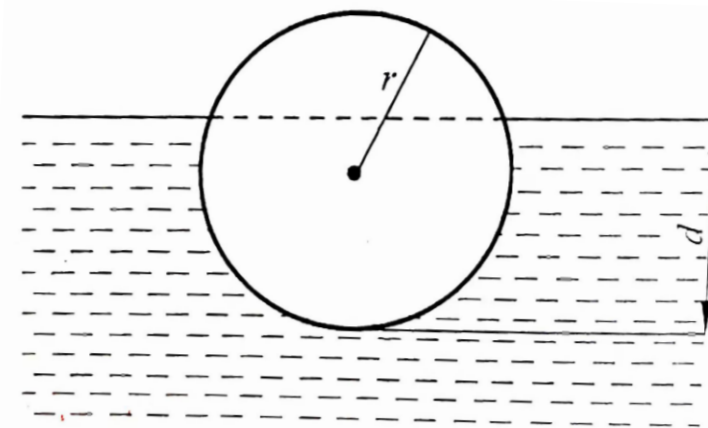
单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

半径为 $r = 5\text{cm}$ ，密度为 $\rho = 0.638\text{kg/cm}^3$ 的木质小球投入水中，问球浸入水中部分的深度 d 等于多少？



解：球的质量为 $\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ ，排出的水的质量为

$$\int_0^d \pi [r^2 - (x - r)^2] dx = \frac{1}{3} \pi d^2 (3r - d)$$

根据Archimedes定律，有 $\frac{1}{3} \pi d^2 (3r - d) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$

$$\Rightarrow d^3 - 3rd^2 + 4r^3\rho = 0 \quad \Rightarrow d^3 - 15d^2 + 319 = 0$$

代数方程！——本章的研究对象

本章研究的问题



概论

研究问题

代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

首先考虑方程 $f(x)=0$, 其中

$x \in \mathbb{R}$ (单变量/一元) , $f \in C[a,b]$ (可以无穷区间)

若实数 x^* 满足以上方程, 则称为根, 或者函数 $f(x)$ 的**零点**

情况一

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0$$

代数 (algebra) 方程

情况二

$$f(x) = 3x^2 - e^x \quad f(x) = x \ln x - 1 \quad f(x) = x - \sin x$$

超越方程

大部分情况下, 我们仅能给出这些方程的数值解!

本章我们也只讨论实数解!

本章研究的问题



概论

研究问题

代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

首先考虑方程 $f(x)=0$, 其中

$x \in \mathbb{R}$ (单变量/一元) , $f \in C[a,b]$ (可以无穷区间)

若**实数** x^* 满足以上方程, 则称为根, 或者函数 $f(x)$ 的**零点**

进一步 假设 $f(x)$ 可以分解为

$$f(x) = (x - x^*)^m g(x), m \in \mathbb{R}^+, g(x^*) \neq 0$$

x^* 是 $f(x)$ 的**m重零点**, 或方程 $f(x)=0$ 的**m重根**

如果 g 充分光滑, 显然: $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*) = 0, f^{(m)}(x^*) \neq 0$

代数方程的历史回顾



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第四章

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i, a_n \neq 0$$

代数 (algebra) 方程

两次

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$



$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{i=1}^n x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{i=1}^n x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

弗朗索瓦·韦达
(François Viète, 1540-1603)

当过律师，当过议员，在对西班牙的战争中曾为政府破译敌军的密码

代数方程的历史回顾



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

三次及四次



塔尔塔利亚



吉罗拉莫·卡尔达诺



费拉里

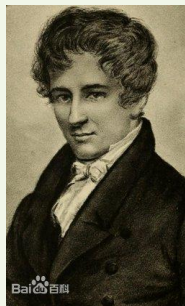
(Nicolo Tartaglia, 1500-1557) (Girolamo Cardano, 1501 -1576) (Ferrari Lodovico 1522-1565)

先解决 $x^3 + px + q = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$

用 $x' = x - \frac{b}{3a}$, 带入消去2次项

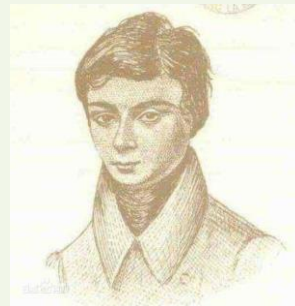
五次及以上

欧拉, 拉格朗日, 高斯, 傅里叶, 柯西...



阿贝尔

(Niels Henrik Abel, 1802-1829)



埃瓦里斯特·伽罗瓦

(Évariste Galois, 1811-1832)

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

五次及以上的代数方程的解不能用系数的加、减、乘、除和开方的有限次运算来表示（没有代数一般解）

代数学基本定理

任何复系数一元 n 次多项式方程在复数域上至少有一根($n \geq 1$)，由此推出， n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根（重根按重数计算）



这是一个代数问题，但是证明它却隐含着复分析、拓扑、测度论...

同时，这也是现代线性系统理论和分析的基石之一！

概论

研究问题
代数方程的回顾

相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

函数空间

$C[a,b]$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续实值（或复值）函数全体，按照函数的加法以及实数（复数）与函数的乘法，构成了 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 上的线性空间

若： $f, g \in C[a,b]$ $\alpha \in \mathbb{R}$ or $\alpha \in \mathbb{C}$ $x \in [a,b]$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

$C^n[a,b]$ 定义为 $[a,b]$ 上具有 n 阶连续导数的实（复）函数全体

$P^n[a,b]$ 定义为 $[a,b]$ 上不超过 n 次的多项式全体

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

函数空间的权函数

若 $\rho \in C[a, b]$, 满足

$$(1) \rho(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$$

$$(2) \int_a^b x^k \rho(x) dx, k = 1, 2, \dots, \text{ 存在}$$

$$(3) \text{ 若对 } [a, b] \text{ 上的非负连续函数 } g, \int_a^b \rho(x) g(x) dx = 0 \text{ 成立, 则 } g(x) \equiv 0$$

称 ρ 为 $[a, b]$ 上的一个权函数

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

函数空间的内积

若 $\rho \in C[a, b]$, 是 $[a, b]$ 上的一个权函数, 对 $f, g \in C[a, b]$, 可以定义内积

$$(f, g)_{\rho} = \int_a^b \rho(x) f(x) g(x) dx$$

这也称为带权 ρ 的内积

显然有 $\rho(x) \equiv 1$ 时, 有

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

函数空间的范数

根据如上定义的函数内积，我们可以导出 $C[a,b]$ 的2-范数

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)_\rho} = \left[\int_a^b \rho(x) [f(x)]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

也可以不从内积出发，定义无穷范数

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

罗尔定理

如果函数 $f(x)$ 满足

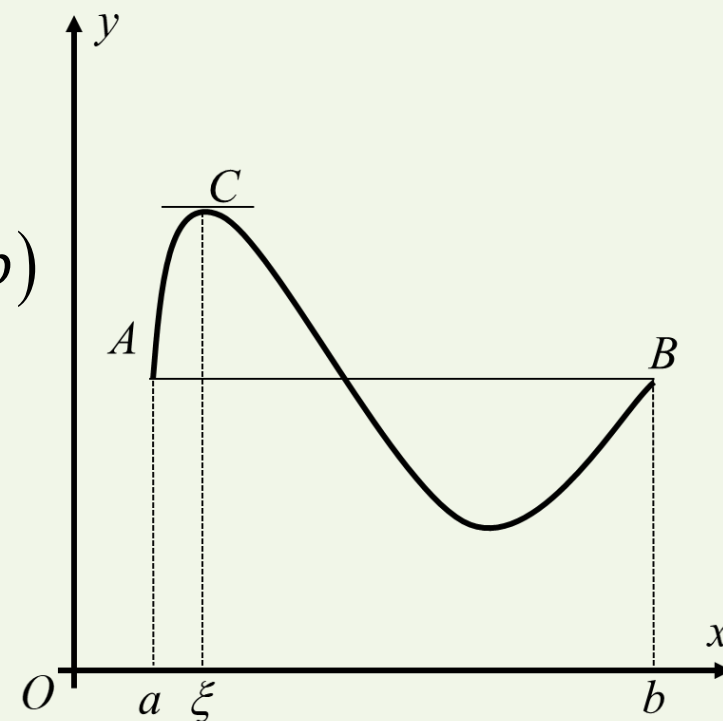
①在闭区间 $[a, b]$ 上连续

②在开区间 (a, b) 内可导

③在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi, a < \xi < b$, 使得

$$f'(\xi) = 0$$



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

微分中值定理（拉格朗日中值定理）

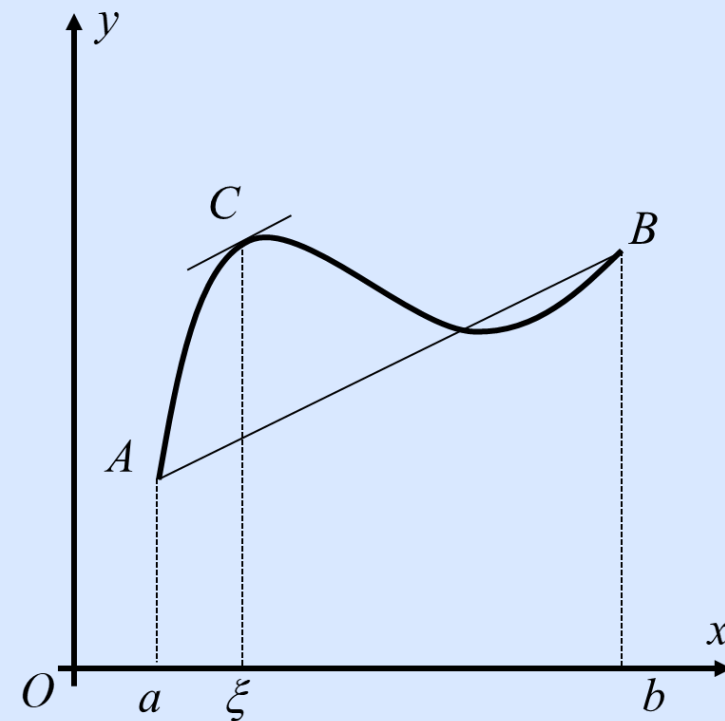
如果函数 $f(x)$ 满足

①在闭区间 $[a, b]$ 上连续

②在开区间 (a, b) 内可导

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi, a < \xi < b$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

泰勒公式

如果函数 f 在 x_0 邻域内有 $n+1$ 阶导数, 则在此邻域内的 x 满足

$$\begin{aligned} f(x) = & f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ & + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \boxed{\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x - x_0)^{n+1}} \\ & \searrow \\ & R_n(x) \end{aligned}$$

是 x_0 和 x 之间的值, 称为 f 在 x_0 处的 n 阶泰勒 (Taylor) 公式

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

4.1 概论及背景知识

4.2 二分法

4.3 不动点迭代法

4.4 迭代加速

4.5 牛顿迭代法

4.6 非线性方程组的数值解法

4.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

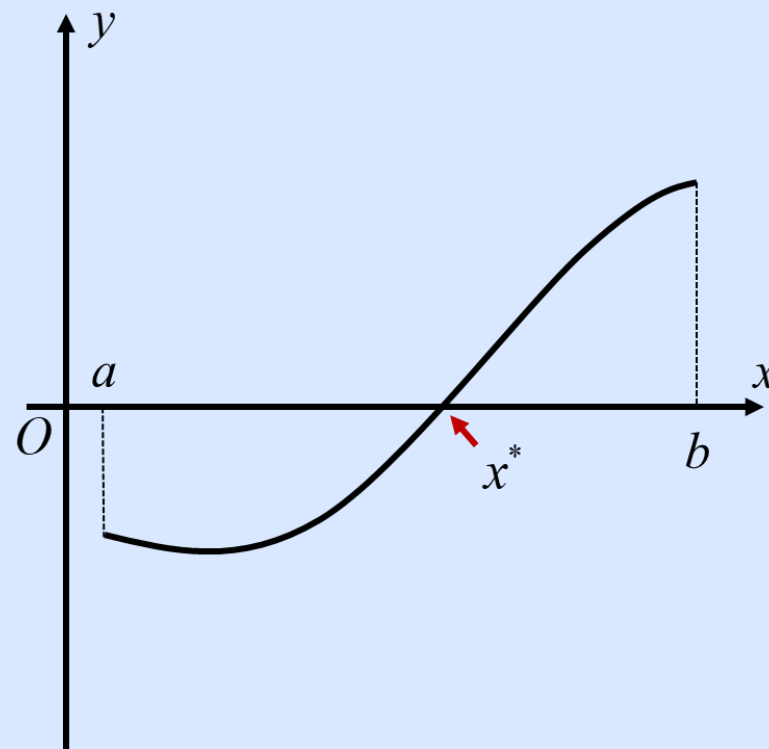
非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

方程有根区间

设 $f \in C[a, b]$, 如果 $f(a)f(b) < 0$, 那么至少存在一点 $x^* \in (a, b)$ 使得方程 $f(x^*) = 0$ 取到根/解, $[a, b]$ 称为方程的一个有根区间

如何确定这个区间?



二分法的步骤



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间

二分法的步骤

二分法图示

试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

设方程 $f(x)=0$ ，找到一个有根的区间 $[a,b]$ ，初始状态，令 $[a_0, b_0] = [a, b]$

假定在第 k 步得到了有根区间 $[a_k, b_k]$ ，即满足： $f(a_k)f(b_k) < 0$

取 $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$ ，检验 $f(x_k)$ 的值

若 $f(a_k)f(x_k) < 0$ ，则取新的区间 $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_k]$ ；反之取新的区间 $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_k, b_k]$

向左压缩

向右压缩

于是，产生了一个有根区间的序列 $\{[a_k, b_k]\}$

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots$$

如果迭代过程中刚好 $f(x_k)=0$ ，则直接得到解，否则每次压缩一半的有根区间

二分法图示



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第四章

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

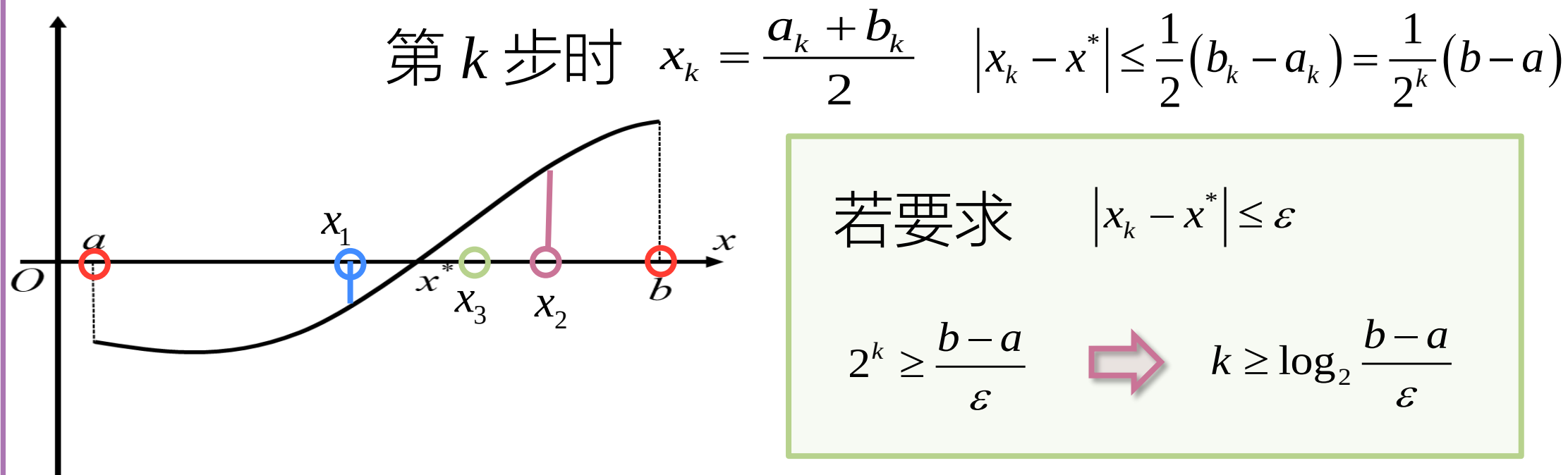
单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

从图中我们可以看出， $\{x_k\}$ 离 x^* 的差距近乎远，但是上限不超过本次迭代的收缩区域的长度



随着序列 $\{[a_k, b_k]\}$ 收缩，显然其中点序列 $\{x_k\}$ 逐渐逼近方程的解 x^*

但是收敛速度如何？

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示

试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

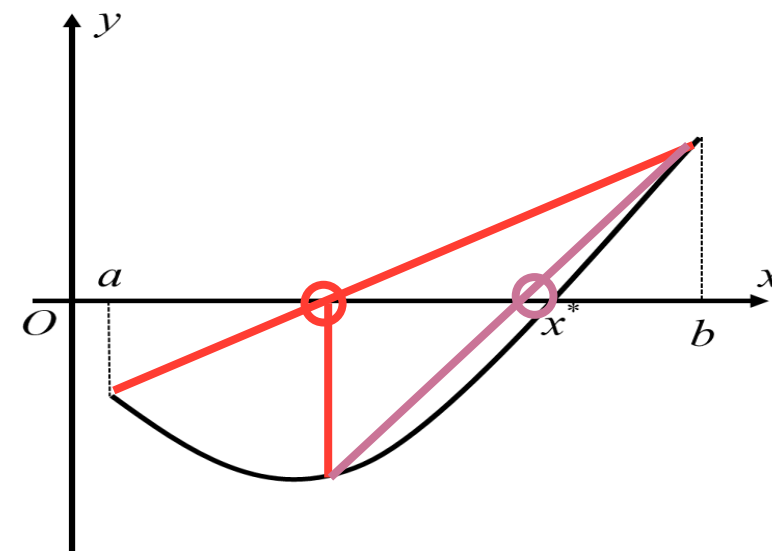
同样假定在第 k 步得到了有根区间 $[a_k, b_k]$ ，即满足

$$f(a_k)f(b_k) < 0$$

此时不再用区间的中点更新，而是考虑 $(a_k, f(a_k))$ 和 $(b_k, f(b_k))$ 连线与 x 轴的交点

$$x_k = b_k - \frac{f(b_k)(b_k - a_k)}{f(b_k) - f(a_k)}$$

只有满足函数在区间内有唯一的解，且函数为凸函数时，才能收敛到近似解，收敛速度比二分法略快



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

4.1 概论及背景知识

4.2 二分法

4.3 不动点迭代法

4.4 迭代加速

4.5 牛顿迭代法

4.6 非线性方程组的数值解法

4.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

不动点迭代法的步骤



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

继续考虑方程 $f(x)=0$ ，将其改写成等价的形式 $x=\varphi(x)$

$\varphi \in C[a,b]$ 同样是一个连续的函数

构造迭代法 $x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,\dots$

如果 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ ，则 x^* 满足方程 $x=\varphi(x)$ ；称 φ 为迭代函数， x^* 是 φ 的一个不动点

回忆一下第三章

$$\mathbf{A}\bar{x} = \bar{b} \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_{k+1} = \mathbf{B}\bar{x}_k + \bar{f} \quad \mathbf{B} \text{ 为迭代矩阵}$$

怎么构造 φ ？是否收敛？收敛速度如何？

不动点的性质—存在性和唯一性



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

定理4.3.1 (教材编号)

设 $\varphi \in C[a, b]$, 且 $a \leq \varphi(x) \leq b, \forall x \in [a, b]$ (**映内性**)

存在常数 $L \in (0, 1)$, 使得: $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [a, b]$

则 φ 在 $[a, b]$ 上一定存在不动点, 且不动点唯一

证明: 先证存在性

(1) 若在边界上 $\varphi(a) = a$ 或 $\varphi(b) = b$, 即已得证存在性

(2) 若 $a < \varphi(x) < b$, 构造 $\phi(x) = \varphi(x) - x$, 显然

$$\phi(a) = \varphi(a) - a > 0, \phi(b) = \varphi(b) - b < 0$$

存在性得证

根据方程有根区间的定理: 必有 $x^* \in (a, b)$ 满足 $\phi(x^*) = \varphi(x^*) - x^* = 0$,

不动点的性质—存在性和唯一性



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

证明：再证唯一性

(3) 反证法！假定存在两个不动点 $x_1^*, x_2^* \in [a, b], x_1^* \neq x_2^*$ ，则

$$|x_1^* - x_2^*| = |\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)| \leq L|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*| \quad \text{矛盾!}$$

唯一性得证

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq L|x - y|$$

也叫利普希兹 (Lipschitz) 条件, L 称为Lipschitz常数

若 $\varphi \in C^1[a, b]$ ，且 $|\varphi'(x)| \leq L < 1, \forall x \in (a, b)$ ，由微分中值定理可得

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(\xi)| |x - y| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [a, b] \quad \text{(\textbf{压缩性})}$$

不动点的性质—全局收敛性



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

定理4.3.2 (教材编号)

设 $\varphi \in C[a, b]$, 且满足映内性和压缩性, 则对 $\forall x_0 \in [a, b]$, 由上述迭代法产生的序列 $\{x_k\}$, 收敛至不动点, 而且对整数 $p \geq 1$, 有

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{1}{1-L} |x_{k+1} - x_k| \quad |x^* - x_k| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}| \quad |x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

请对比回忆第三章

$$\|\bar{e}^{(k)}\| = \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\| \leq \frac{q}{1-q} \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^{(k-1)}\|$$

$$\|\bar{e}^{(k)}\| = \|\bar{x}^{(k)} - \bar{x}^*\| \leq \frac{q^k}{1-q} \|\bar{x}^{(1)} - \bar{x}^{(0)}\|$$

不动点的性质—全局收敛性



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

证明

(1) 前一定理已经保证了不动点 x^* 的存在性和唯一性

(2) 由不动点的迭代步骤及压缩性可知

$$|x_k - x^*| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(x^*)| \leq L |x_{k-1} - x^*| \leq \dots \leq L^k |x_0 - x^*| \quad L \in (0, 1), \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

$$(3) \quad |x_{k+p} - x_k| = |x_{k+p} - x_{k+p-1} + x_{k+p-1} - \dots + x_{k+1} - x_k|$$

$$\leq |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + \dots + |x_{k+1} - x_k|$$

$$\leq (L^{p-1} + L^{p-2} + \dots + L + 1) |x_{k+1} - x_k| = \frac{1 - L^p}{1 - L} |x_{k+1} - x_k| \leq \frac{1}{1 - L} |x_{k+1} - x_k|$$

另两式推导略!

$$\text{若: } |x_k - x_{k-1}| < \varepsilon \quad \text{则: } |x_k - x^*| \leq \frac{L}{1 - L} \varepsilon \quad L \ll 1 \quad \text{收敛快}$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

✓ 委托delegate

➤ 在Base文件夹中添加网络学堂下载的Delegate类文件

```
namespace NumNet
{
    /// <summary> 一元函数, double→double
    public delegate double UnaryFunction(double x);
}
```

声明了名为**UnaryFunction**的委托，可以理解成一类函数，它们以1个double作为输入，并输出1个double，所以就是一元函数（也可以不声明，用**Func<double,double>**）

// 直接将已有函数赋给委托对象

```
UnaryFunction f = Math.Cosh;
```

// 将自定义函数赋给委托对象

```
f = Sigmoid;
```

// 上例的简化写法，不想额外写Sigmoid方法用它

```
UnaryFunction sigm = x => 1 / (1 + Math.Exp(-x));
```

// 上例的带函数体写法，一句代码写不完时用它

```
UnaryFunction tanh = x =>
```

```
{
```

```
    double e2x = Math.Exp(2 * x);
```

```
    return (e2x - 1) / (e2x + 1);
```

```
};
```

委托对象与函数一样使用，例如调用tanh(1)求1的双曲正切值

```
public static double Sigmoid(double x)
{
    return 1 / (1 + Math.Exp(-x));
}
```

C#中的"=>"

Lambda表达式，表示一个匿名函数，=>前面的是参数，后面的是函数体，通常不必为输入参数指定类型

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

✓ 二分法的实现

- 在NumNet项目下添加NonlinearEquations文件夹
- 在该文件夹中添加网络学堂下载的Bisection和FixedPoint类文件

```
protected static double FindZeroSimp(UnaryFunction f, double low, double up)
```

```
{
```

```
    double next;
```

```
    while (up - low > 1e-10)
```

```
    {
```

```
        next = (low + up) / 2;
```

```
        if (f(up) * f(next) <= 0)
```

```
            low = next;
```

```
        else
```

```
            up = next;
```

```
    }
```

```
    return low;
```

```
}
```

采用区间长度收敛判定。二分法区

间长度每次减半，必定收敛，因此 $|f(x)| \leq 10^{-10}$?
不需要设定最大循环次数

对于连续函数 f ， $f(x) \cdot f(y) \leq 0$
即说明 $[x, y]$ 区间段内存在函数零点

$f(\text{up}) * f(\text{next}) \leq 0$ ，区间压缩到 $[\text{next}, \text{up}]$ ，只需把下
界 low 改为 next 即可；反之，将上界 up 改为 next

代码简单，但是存在 $f(\text{up})$ 计算多遍的问题，在函数 f 比较复杂的情况下，
大约有一半的时间都在重复计算

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

✓ 不动点迭代法的实现

```
public static double Iterate(UnaryFunction phi, double x0, int maxCount = 1000)
```

```
{
```

```
    double xOld = x0 - 1, x = x0;
```

```
    int count = 0;
```

```
    while (Math.Abs(x - xOld) > 1e-10)
```

```
    {
```

```
        if (count >= maxCount)
```

```
            throw new Exception("未在指定迭代次数内收敛，不动点迭代法可能不收敛");
```

```
        xOld = x;
```

```
        x = phi(x);
```

```
        count++;
```

```
    }
```

```
    Console.WriteLine("不动点迭代次数: " + count);
```

```
    return x;
```

```
}
```

注意与二分法的区别，求解 $\varphi(x) = x$
需要1个迭代初始值，不一定收敛

收敛判定条件为 $|\varphi(x) - x|$ 足够小
xOld初始化为x-1，保证能进入循环

迭代 $x = \varphi(x)$

不动点的性质—图解收敛性



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第四章

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

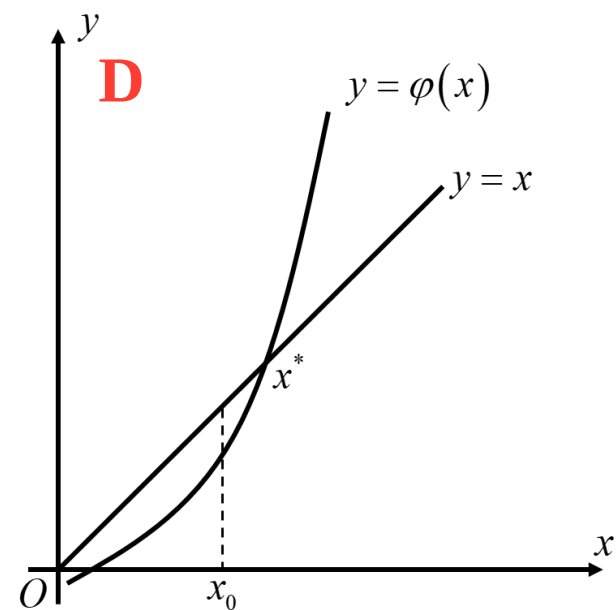
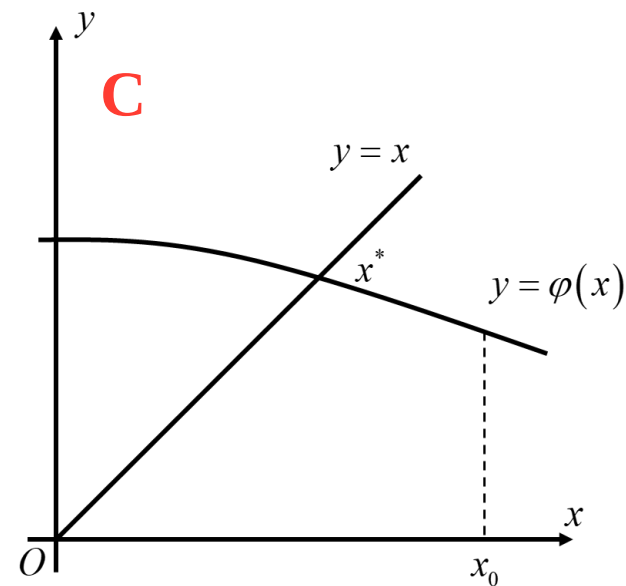
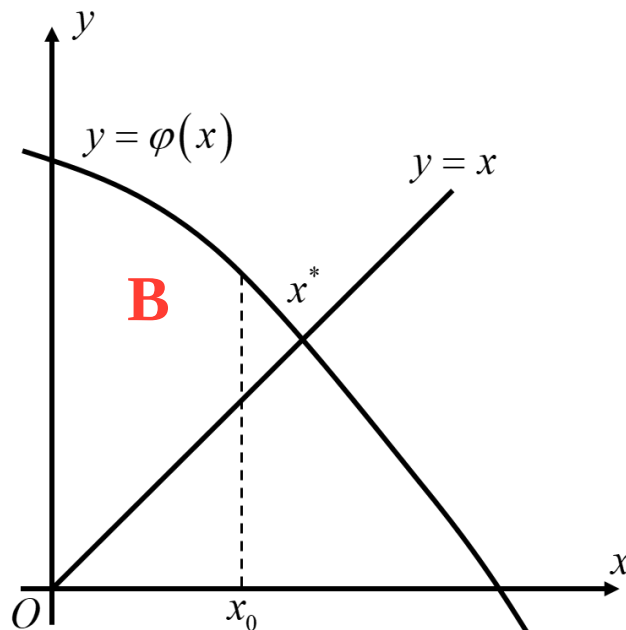
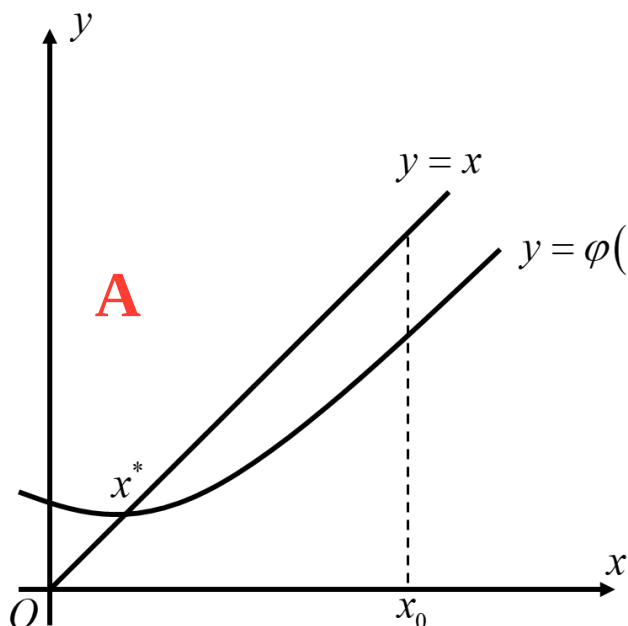
非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

试着画一下如下几个图的迭代过程

$$x = \varphi(x)$$



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

定义4.3.1 (教材编号)

设 φ , 在区间 I 上有不动点 x^* , 若存在一个 x^* 的邻域 $S \subset I$, 对任意 $x_0 \in S$, 不动点法产生的序列 $\{x_k\} \subset S$, 且收敛到 x^* , 则称上述迭代法**局部收敛**

定理4.3.3 (教材编号)

设 x^* 为 φ 的不动点, φ' 在 x^* 的邻域上存在且连续, 满足 $|\varphi'(x^*)| < 1$, 则迭代法局部收敛

转化为检验不动点上的导数!

不动点的性质—局部收敛性



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

证明

因为 φ' 连续, 故存在一个闭邻域

$$N(x^*) = [x^* - \delta, x^* + \delta] \subset S$$

且有: $|\varphi'(x^*)| \leq L < 1$

$$|\varphi(x) - x^*| = |\varphi(x) - \varphi(x^*)| \leq L|x - x^*| < |x - x^*| \leq \delta$$

—— 压缩性

所以对于一切 $x \in N(x^*)$

$$x^* - \delta < \varphi(x) < x^* + \delta$$

—— 映内性

在局部满足映内性和压缩性!

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数

收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

定义4.3.2 (教材编号)

设序列 $\{x_k\}$ 收敛到 x^* , 记误差 $e_k = x_k - x^*$, 若存在实数 $p \geq 1$, 及非零常数 C , 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$$

则称序列为 **p阶收敛**, C 为 **渐近误差常数**

定理4.3.4 (教材编号)

设 x^* 为 φ 的不动点, $\varphi^{(p)}$ 在 x^* 的邻域上存在且连续, 整数 $p > 1$, 且满足

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, k = 1, 2, \dots, p-1, \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

则迭代法产生的序列 p 阶收敛, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数

收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, k = 1, 2, \dots, p-1, \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

证明

(1) : $\varphi'(x^*) = 0 < 1$, 确保了局部收敛性

(2) : 取充分接近于 x^* 的 x_0 , 设 $x_0 \neq x^*$ 并且有 $x_k \neq x^*, k = 1, 2, \dots$

考虑 $\varphi(x)$ 在 x^* 的 $(p-1)$ 阶泰勒展开

$$\varphi(x) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x-x^*) + \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x-x^*)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x-x^*)^p$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数

收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, k = 1, 2, \dots, p-1, \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

证明 (续)

把 x_k 代入上式, 有

$$\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \dots + \frac{\varphi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x_k - x^*)^{p-1} + \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k - x^*)^p$$

因为 ξ 在 x_k, x^* 之间, 由不动点迭代公式: $x_{k+1} = \varphi(x_k), \varphi(x^*) = x^*$

$$\underbrace{x_{k+1} - x^*}_{e_{k+1}} = \varphi(x_k) - \varphi(x^*) = \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!} \underbrace{(x_k - x^*)^p}_{e_k^p} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

4.1 概论及背景知识

4.2 二分法

4.3 不动点迭代法

4.4 迭代加速

4.5 牛顿迭代法

4.6 非线性方程组的数值解法

4.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速

Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

考虑刚才定理中的线性收敛: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = C, 0 < C < 1$

当k很大时

$$x_{k+1} - x^* \approx c(x_k - x^*) \quad x_{k+2} - x^* \approx c(x_{k+1} - x^*) \quad |c| = C$$

$$\Rightarrow \frac{x_{k+2} - x^*}{x_{k+1} - x^*} \approx \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} \Rightarrow x^* = \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

记 $\nabla x_k = x_{k+1} - x_k$ $\nabla^2 x_k = \nabla x_{k+1} - \nabla x_k = (x_{k+2} - x_{k+1}) - (x_{k+1} - x_k) = x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k$

在k+2步计算完时, 更新一个加权平均值

$$\bar{x} = \frac{x_k x_{k+2} - x_{k+1}^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k} = x_k - \frac{(\nabla x_k)^2}{\nabla^2 x_k}$$

可以证明

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\bar{x}_k - x^*}{x_k - x^*} = 0$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

把刚才的Aitken方法换成迭代算法

$$\left\{ \begin{array}{l} y_k = \varphi(x_k) \\ z_k = \varphi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{array} \right.$$

x_{k+1}

x_{k+2}

$$\bar{x} = x_k - \frac{(\nabla x_k)^2}{\nabla^2 x_k}$$

写成不动点形式: $x_{k+1} = \psi(x_k)$

$$\psi(x) = x - \frac{(\varphi(x) - x)^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}$$

可以证明: 如果 x^* 是 $\psi(x)$ 的不动点, 则其也为 $\varphi(x)$ 的不动点,
反之, 若 $\varphi(x)$ 有连续导数且 $\varphi'(x) \neq 1$, 则 x^* 也是 $\psi(x)$ 的不动点

Steffensen迭代法-收敛性



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

若 $\varphi(x)$ 在 x^* 的领域内二阶导数连续, 且 $\varphi'(x^*) \neq 1$, 则Steffensen迭代法是二阶收敛的

若 $0 < |\varphi'(x^*)| < 1$, 则 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 线性收敛

若 $|\varphi'(x^*)| > 1$, 则 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ 不收敛

$x_{k+1} = \psi(x_k)$ 均可二阶收敛

故Steffensen迭代法不但可以提高收敛速度, 有时也能把不收敛的方法改进为二阶收敛的方法

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

- 掌握**代数方程**、**重根**、**不动点**和**局部收敛**概念
- 理解**二分法**、**试位法**的思路和计算过程
- 理解**不动点迭代法收敛**的要求
- 掌握**收敛阶**的分析方法
- 理解**Aitken加速**和**Steffensen迭代**

作业

教材P115-1、P115-3

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

4.1 概论及背景知识

4.2 二分法

4.3 不动点迭代法

4.4 迭代加速

4.5 牛顿迭代法

4.6 非线性方程组的数值解法

4.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

单根情况下的牛顿迭代法计算公式



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

求解方程 $f(x)=0$ 的一个根 x^* ；设有一个近似值 $x_k \approx x^*$ ，且 f'' 存在并连续

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_k)^2 = 0$$

$$x^* = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - \frac{f''(\xi)}{2f'(x_k)}(x^* - x_k)^2 \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

称为：**Newton迭代法**或者**Newton-Raphson迭代法**

显然，根据例题可知，牛顿法是不动点迭代法的一种形式！

图解牛顿法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第四章

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

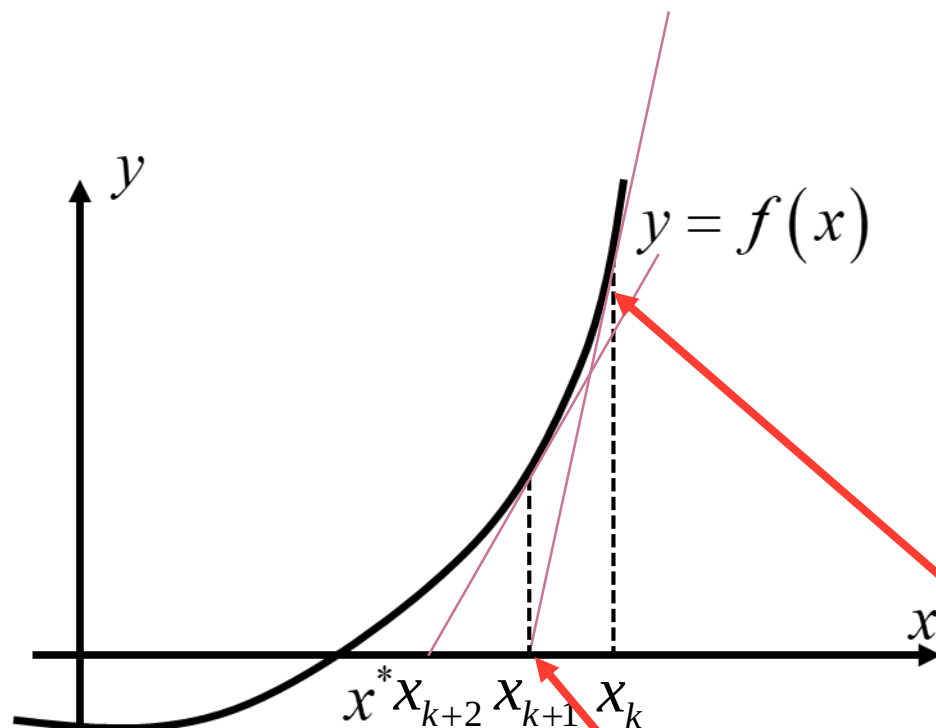
单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



$(x_k, f(x_k))$ 点上的切线: $y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$

和x轴的交点: $x = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性

牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

由之前的习题已知

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \quad \varphi'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\text{显然: } \varphi'(x) \Big|_{x^*} = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0$$

定理4.5.1 (教材编号)

设 $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$, 且 f 在包含 x^* 的一个区间上有二阶连续导数, 则牛顿迭代法局部收敛到 x^* , 且至少是二阶收敛, 并有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

牛顿法的收敛性



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第四章

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法

收敛性

牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

证明：根据牛顿迭代法已知的结论有： $\varphi(x^*) = x^*, \varphi'(x^*) = 0$

$$\varphi''(x) = \left(\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \right)' = \frac{(f'(x))^2(f'(x)f''(x) + \cancel{f(x)f'''(x)}) - \cancel{2f(x)f''(x)f'(x)f''(x)}}{(f'(x))^4}$$

$$\varphi''(x)|_{x^*} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

根据局部收敛定理4.3.4即可知，该迭代法二阶收敛，同时

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} \frac{1}{2!} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

牛顿法的收敛性—重根的情况



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的 m 重根, $m > 1$ 即: $f(x) = (x - x^*)^m g(x)$

此时, 即便满足 $g'(x)$ 存在, $g(x^*) \neq 0$, 但是

$$f'(x^*) = m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x) \Big|_{x^*} = 0$$

不满足定理4.5.1, 此时到底收敛与否?

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{(x - x^*)^m g(x)}{m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x)} = x - \frac{(x - x^*) g(x)}{mg(x) + (x - x^*) g'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{g(x) + \cancel{(x - x^*) g'(x)}}{mg(x) + \cancel{(x - x^*) g'(x)}} - \cancel{(x - x^*) g'(x)} \left(\frac{1}{mg(x) + \cancel{(x - x^*) g'(x)}} \right)'$$

牛顿法的收敛性—重根的情况



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法

收敛性

牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

$$\varphi'(x)|_{x^*} = 1 - \frac{1}{m} \neq 0, |\varphi'(x)| < 1 \Rightarrow \text{此时牛顿法收敛且线性收敛}$$

如何保持二阶收敛？

$$\text{方法一: } \varphi(x) = x - \frac{mf(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi(x)|_{x^*} = x - \frac{m(x-x^*)^m g(x)}{m(x-x^*)^{m-1} g(x) + (x-x^*)^m g'(x)} \Big|_{x^*} = x^*$$

是不动点！

$$\varphi'(x)|_{x^*} = 1 - m \left(\frac{f}{f'} \right)' \Big|_{x^*} = 1 - m \frac{1}{m} = 0$$

至少二阶收敛！

牛顿法的收敛性—重根的情况



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法

收敛性

牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

方法二：令 $\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ ，所以若 x^* 是方程 $f(x) = 0$ 的 m 重根，则

$$\mu(x) = \frac{(x - x^*)^m g(x)}{m(x - x^*)^{m-1} g(x) + (x - x^*)^m g'(x)} = \frac{(x - x^*) g(x)}{mg(x) + (x - x^*) g'(x)}$$

显然， x^* 是方程 $\mu(x) = 0$ 的单根！

因而可以构造牛顿迭代法

$$\varphi(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{\frac{f}{f'}}{\frac{f' \cdot f' - f \cdot f''}{(f')^2}} = x - \frac{f \cdot f'}{f' \cdot f' - f \cdot f''}$$

至少二阶收敛！

牛顿法的收敛性—全局收敛性



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第四章

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法

收敛性

牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

定理4.5.1只保证了牛顿迭代法的局部收敛性；事实上，有时候迭代是初值敏感的，有些时候迭代是初值不敏感的...

那么有没有一般性的收敛呢？

考虑开根号 $x = \sqrt{a}, a > 0 \Rightarrow f(x) = x^2 - a = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x$

构造牛顿迭代 $\varphi(x) = x - \frac{x^2 - a}{2x} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right) \quad x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$

这就是计算器的实现方法！

根号的倒数 $x = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} - a = 0 \quad \varphi(x) = x - \frac{x^{-2} - a}{-2x^{-3}} = \frac{3}{2}x - \frac{a}{2}x^3$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k(1.5 - 0.5ax_k^2)$ 周五我们来编程试试

牛顿法的收敛性—全局收敛性



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法

收敛性

牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) \quad \text{这个迭代, 对初值不是太敏感}$$

先看 $0 < x_0 < \sqrt{a}$

$$x_1 - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right) - \sqrt{a} = \frac{x_0^2 - 2x_0\sqrt{a} + a}{2x_0} = \frac{(x_0 - \sqrt{a})^2}{2x_0} > 0 \quad x_1 > \sqrt{a}$$

$$\text{再看 } x_k > \sqrt{a} \Rightarrow x_{k+1} > \sqrt{a} \Rightarrow \dots \dots x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right) - x_k = \frac{a - x_k^2}{2x_k} < 0$$

所以 $\{x_k\}, k = 1, 2, \dots$ 序列单调递减, 且下界为 $\sqrt{a}$ **收敛!**

关于牛顿迭代法更加一般性的全局收敛, 本课不加讨论

牛顿法的变化-牛顿下山法



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解

牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

对于初值敏感的一些问题的改进

$$\text{下山: } |f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

$$\tilde{x}_{k+1} = x_k - \frac{f}{f'}$$

正常的牛顿法

$$x_{k+1} = \lambda \tilde{x}_{k+1} + (1 - \lambda) x_k$$

松弛

$$x_{k+1} = \lambda \left(x_k - \frac{f}{f'} \right) + (1 - \lambda) x_k = x_k - \lambda \frac{f}{f'}$$

需要测试: $0 < \lambda \leq 1$ 可实现下山的过程

牛顿法的变化-平行线法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第四章

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解

牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

在牛顿迭代中，每步计算 $f'(x)$ 稍显得有点麻烦，因而可以近似

$$x_{k+1} = x_k - Cf(x_k), C \neq 0$$

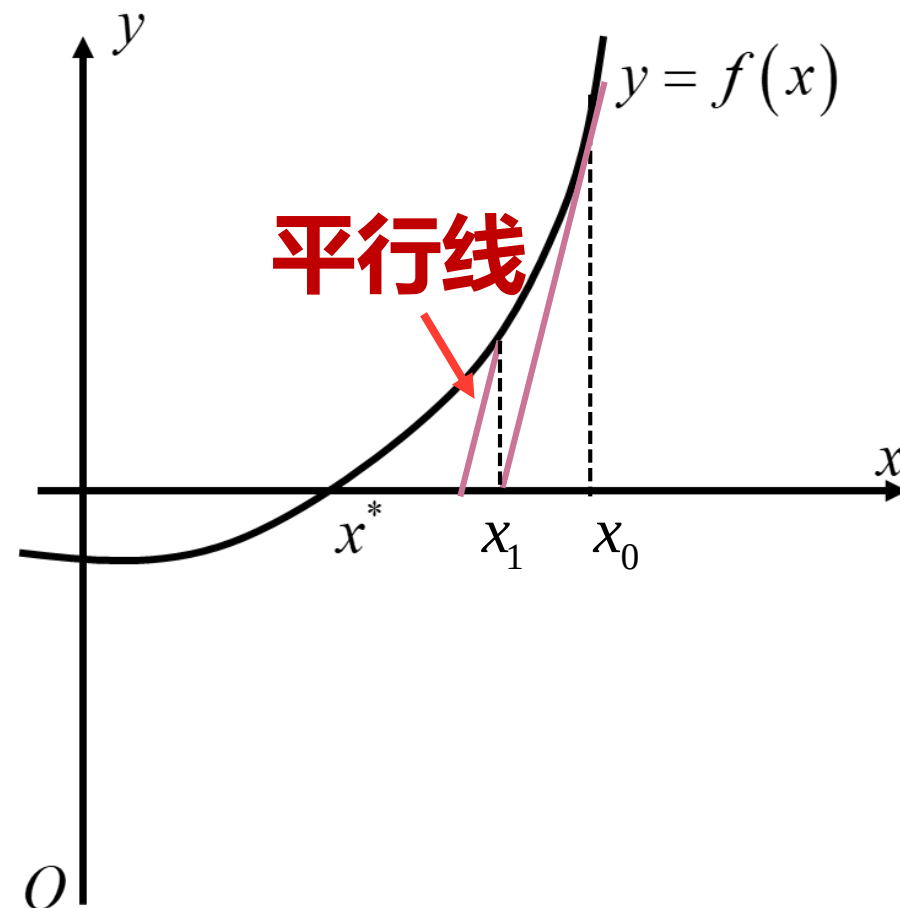
一般的，只要在根附近满足

$$|\varphi'(x)| = |1 - Cf'(x)| < 1$$

$$\Rightarrow 0 < Cf'(x) < 2 \quad \text{即可收敛}$$

更方便的，直接取 $C = 1/f'(x_0)$

即为简化牛顿法！



牛顿法的变化-割线法



清华大学深圳国际研究生院

Tsinghua Shenzhen International Graduate School

海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第四章

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

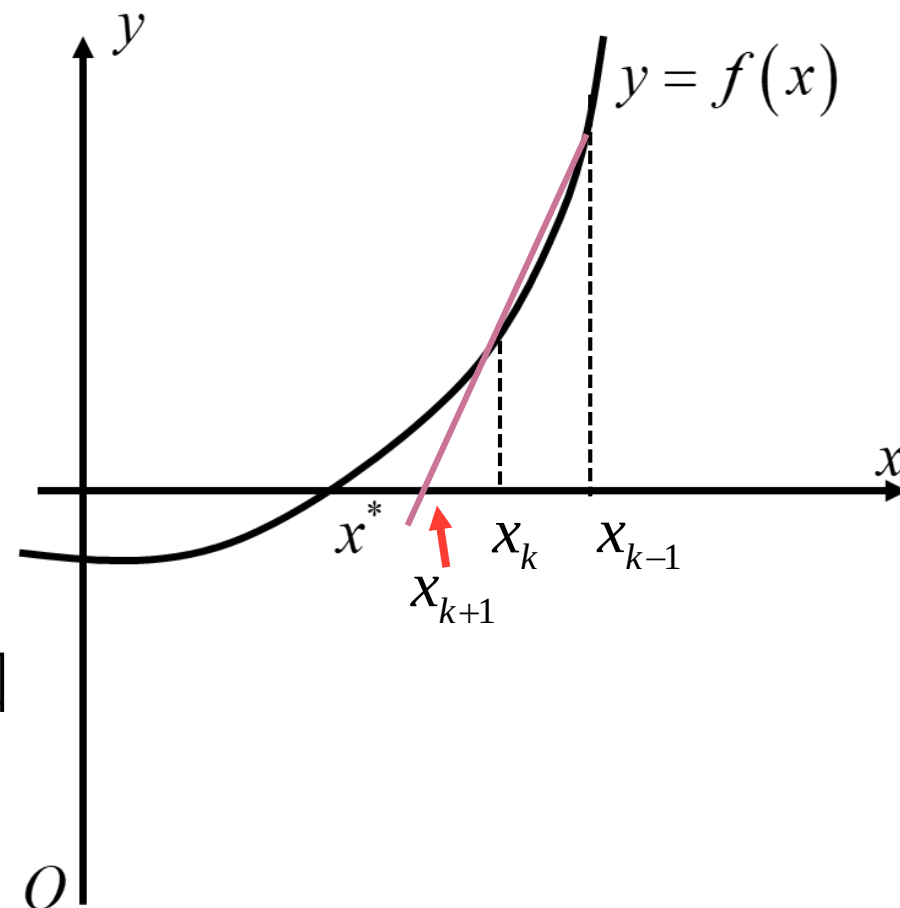
在牛顿迭代中，每步计算 $f'(x)$ 稍显得有点麻烦，因而可以近似

$$f'(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

特点

1. 两步迭代法，计算 $k+1$ 时需要知道 k 和 $k-1$ 的值
2. 收敛介于线性和二阶之间



牛顿法的变化-抛物线法



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解

牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

可以计算复根的一种方法

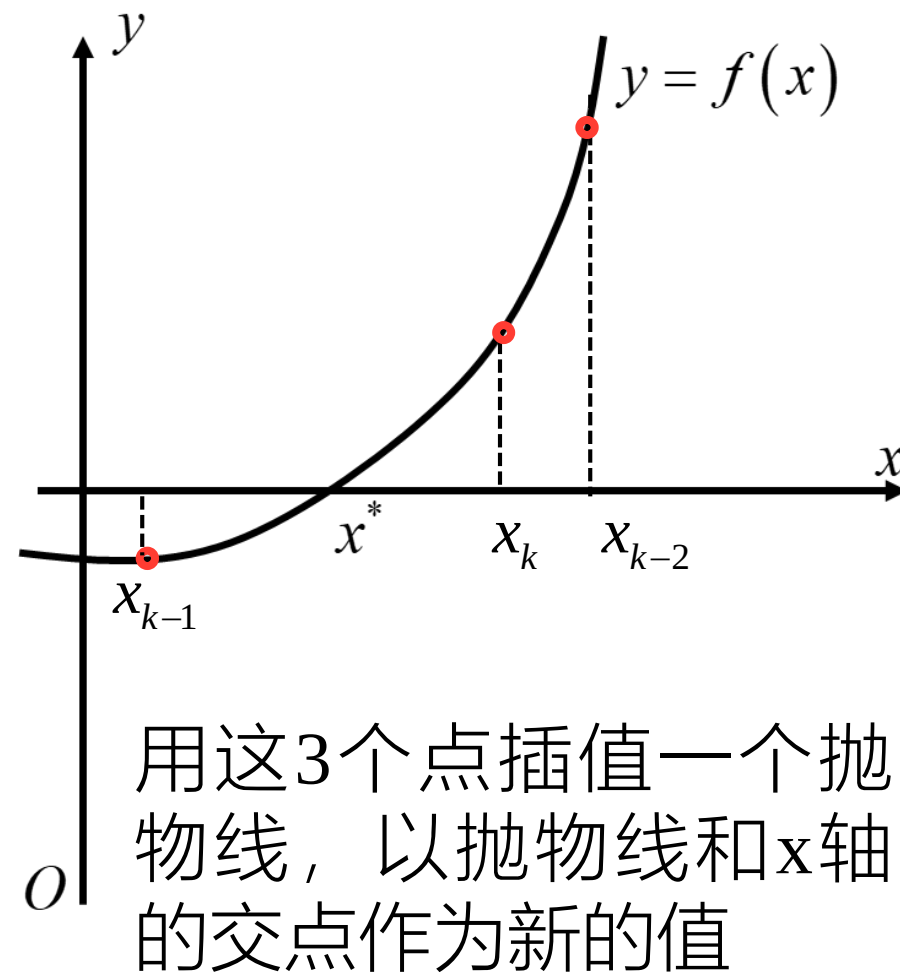
$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}$$

$$\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$$

$$f[x_k, x_{k-1}] = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}] = \frac{f[x_k, x_{k-2}] - f[x_k, x_{k-1}]}{x_{k-2} - x_{k-1}}$$

这里少了插值法作为工具，先不讨论



概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

4.1 概论及背景知识

4.2 二分法

4.3 不动点迭代法

4.4 迭代加速

4.5 牛顿迭代法

4.6 非线性方程组的数值解法

4.7 编程实践（穿插在两周的课程中）

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组

Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

记

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$$

$$\bar{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$$



$$\bar{F}(\bar{x}) = \bar{0}$$

设向量函数 $\vec{F}$ 定义在区域 $D \in \mathbb{R}^n$, 若 $\bar{x}_0 \in D, \lim_{x \rightarrow x_0} \vec{F}(\bar{x}) = \vec{F}(\bar{x}_0)$,
则称 $\vec{F}$ 在 $\bar{x}_0$ 连续

$\vec{F}$ 在 D 上的每一点都连续, 则称在 D 上连续

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

向量函数 $\vec{F}$ 的**Jacobi矩阵**，也称为**导数矩阵**，记为

$$\vec{F}'(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵

数值解法

编程实践

和非线性方程一样构造： $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{x})$ ， $\bar{\varphi}$ 在 D 上连续

定理4.6.1 (教材编号)

对如上的构造，假定：

①存在闭集 $D_0 \subset D$ ，实数 $L \in (0,1)$ ，使 $\|\bar{\varphi}(\bar{y}) - \bar{\varphi}(\bar{x})\| \leq L\|\bar{y} - \bar{x}\|, \forall \bar{x}, \bar{y} \in D_0$

压缩性质

② $\bar{\varphi}(\bar{x}) \in D_0, \forall \bar{x} \in D_0$ **映内性质**

则 φ 在 D_0 有唯一的不动点 $\bar{x}^*$ ，且对任意 $x_0 \in D_0$ ，迭代法收敛

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}_k\| \leq \frac{1}{1-L} \|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_k\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_0\|$$

又称**压缩映射定理**

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵

数值解法

编程实践

定理4.6.2 (教材编号)

假设如上不动点迭代, $\bar{\varphi}$ 的分量函数具有连续的偏导数, 且

$$\rho(\bar{\varphi}'(\bar{x}^*)) < 1$$

则存在 $\bar{x}^*$ 的一个邻域 S , 对 $\forall x_0 \in S$, 迭代法收敛

同样, 我们也可以定义 $\{\bar{x}_k\}$ 对 $\bar{x}^*$ 的 p 阶收敛

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}^*\|}{\|\bar{x}_k - \bar{x}^*\|^p} = C, p \geq 1, C > 0$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵

数值解法

编程实践

也与一元非线性方程一样，构造非线性方程组的牛顿迭代

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k - \left(\bar{F}'(\bar{x}_k) \right)^{-1} \bar{F}(\bar{x}_k)$$

定理4.6.3 (教材编号)

设 $\bar{F}$ 定义在 $D \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}^*$ 满足方程 $\bar{F}(\bar{x}^*) = \bar{0}$, 在 $\bar{x}^*$ 某开邻域上, $\bar{F}'(\bar{x})$ 存在且连续, $\bar{F}'(\bar{x}^*)$ 非奇异, 则

① 以上迭代产生的序列 $\{\bar{x}_k\}$ 在 $\bar{x}^*$ 某个邻域上超线性收敛于 $\bar{x}^*$

② 若再满足存在 $K > 0$ 使得

$$\left\| \bar{F}'(\bar{x}) - \bar{F}'(\bar{x}^*) \right\| \leq K \left\| \bar{x} - \bar{x}^* \right\|$$

则 $\{\bar{x}_k\}$ 至少平方收敛!

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

✓ Steffensen迭代法的实现

```
public static double Steffensen(UnaryFunction phi, double x0, int maxCount = 1000)
{
    double x = x0, y = phi(x0), z;

    int count = 0;
    while (Math.Abs(y - x) > 1e-10)
    {
        z = phi(y);

        // 可能会遇到分母为0的情况，暂时忽略
        x = (x * z - y * y) / (z - 2 * y + x);

        y = phi(x);

        count++;
    }

    return x;
}
```

收敛判定条件为 $|\varphi(x) - x|$
足够小，式中的 y 即为 $\varphi(x)$

迭代得到下一个 x

$$y = \varphi(x)$$
$$z = \varphi(y)$$

$$x = x - \frac{(y - x)^2}{z - 2y + x}$$
$$= \frac{xz - y^2}{z - 2y + x}$$

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

✓ Newton迭代法的实现

- 在NonlinearEquations文件夹中添加下载的NewtonIteration类文件

```
public static double FindZero(UnaryFunction f, UnaryFunction f1, double x0,
    double m = 1, int maxCount = 1000)
{
    return FixedPoint.Iterate(x => x - m * f(x) / f1(x), x0, maxCount);
}
```

$f(x)$ 的导函数

重根情形下的牛顿迭代公式，重根数未知时取1即可

小提示

- ① 简化牛顿法中，迭代公式为 $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_0)$ ，其实就相当上述方法的“导函数”f1取为常数 $f'(x_0)$ 。例如，已知 $f(x)$ 在 x_0 处的导数值为a，则可赋： $f1 = x \Rightarrow a$ 。
- ② 牛顿下山法中，迭代公式为 $x_{k+1} = x_k - \lambda f(x_k)/f'(x_k)$ ，其实就相当上述方法的“导函数”f1取为 $f'(x)/\lambda$ ，其中 $0 < \lambda \leq 1$ 。不过下山法的关键是确定参数 λ ，并且 λ 可能变化。

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

✓ Newton迭代法的实现

➤ 在NonlinearEquations文件夹中添加下载的NewtonIteration类文件

```
public static double FindZero(UnaryFunction f, double x0, double x1, int maxCount = 1000)
{
    double fx0 = f(x0), fx1 = f(x1);

    int count = 0;
    while (Math.Abs(x1 - x0) > 1e-10)
    {
        double k = (fx1 - fx0) / (x1 - x0);

        x0 = x1; fx0 = fx1;

        x1 -= fx1 / k;
        fx1 = f(x1);

        count++;
    }
    return x1;
}
```

判定条件为某两步的x足够接近

割线法需要两个初始点

求割线的斜率, 要求 $x_1 \neq x_0$ 且 $f(x_1) \neq f(x_0)$

更新变量x0和fx0的值

更新变量x1和fx1的值

C#中方法重载

具有相同的方法名称, 但是方法的参数列表不同
常用来实现功能类似而所处理的数据类型不同的问题

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

✓ 实现开根号

```
public static void Sample()
```

```
{
```

```
    double a = 2;
```

```
    double x0 = 1;
```

```
    UnaryFunction f = x => x * x - a;
```

$$f(x) = x^2 - a$$

```
    Console.WriteLine("不动点迭代法: ");
```

```
    UnaryFunction phi = x => a / x;
```

$$\varphi(x) = \frac{a}{x}$$

```
    double zeroF = FixedPoint.Iterate(phi, x0);
```

常规不动点迭代法求解

```
    Console.WriteLine(zeroF);
```

```
    Console.WriteLine("牛顿迭代法: ");
```

```
    UnaryFunction f1 = x => 2 * x;
```

$f(x)$ 的一阶导函数

```
    double zeroN = NewtonIteration.FindZero(f, f1, x0);
```

```
    Console.WriteLine(zeroN);
```

牛顿迭代法求解

$$f(x) = 0$$

```
}
```

概论

研究问题
代数方程的回顾
相关数学基础

二分法

方程有根的区间
二分法的步骤
二分法图示
试位法

不动点迭代法

迭代的步骤
迭代函数的构造
不动点的性质
不动点处的导数
收敛阶

迭代加速

Aitken加速
Steffensen迭代

牛顿迭代法

单根情况迭代
图解牛顿法
收敛性
牛顿法的完整解
牛顿法的变化

非线性数值解法

非线性方程组
Jacobi矩阵
数值解法

编程实践

- 掌握**代数方程**、**重根**、**不动点**和**局部收敛**概念
- 理解**二分法**、**试位法**的思路和计算过程
- 理解**不动点迭代法收敛**的要求
- 掌握**收敛阶**的分析方法
- 理解**Aitken加速**和**Steffensen迭代**
- 掌握**牛顿法及其变化**的思路和计算过程
- 理解**非线性方程组**数值解法的思路和计算过程

作业

教材P115-8、P115-9、P116-12