



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School

工程硕士数学

第一章 绪论

胡振中 副教授

海洋大楼 702-3, 15999640239 (微信同号)

邮箱: huzhenzhong@tsinghua.edu.cn

个人网站: <http://www.huzhenzhong.net>

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

1.1 课程简介

1.2 工程中的数值问题

1.3 计算机中的数

1.4 误差与有效数字

1.5 数值稳定性

1.6 编程实践

课程介绍



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》第一章

课程简介

课程介绍

教学工具

课程安排

参考资料

工程数值问题

数值分析简介

数值问题举例

科学计算的发展

计算机中的数

数学常数

二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源

误差与相对误差

误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播

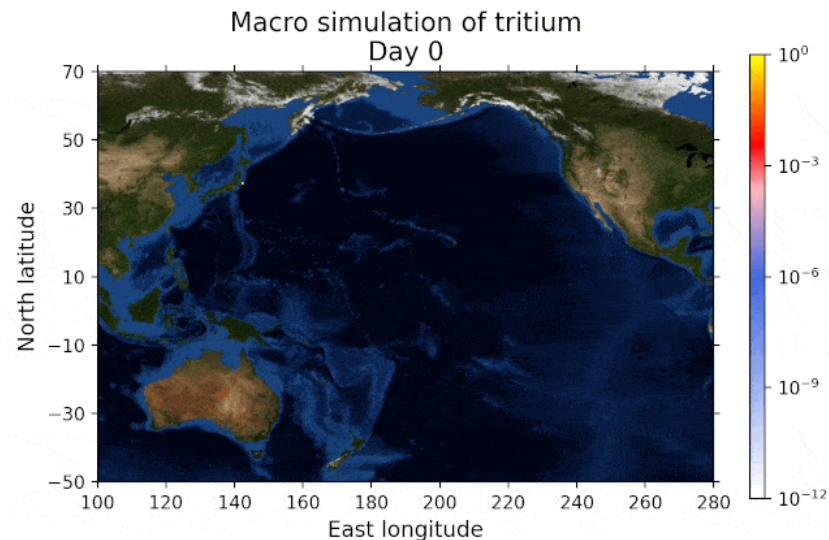
病态问题

数值稳定

避免误差危害

编程实践

- ✓ 研究各种数学问题求解的**数值计算**方法
- ✓ 面向工程数值求解科研需求，通过**土木、建筑**
和海洋工程案例进行应用分析
- ✓ 注重**理论、编程和工程**三方面的充分结合
- ✓ 强调**在工程应用中找到数值问题**，并进行数值求解的能力培养
- ✓ 涵盖**线性方程组的直接和迭代解法、非线性方程的数值解法、插值法与函数逼近、数值积分与数值微分**，以及**常微分方程数值解法**等
- ✓ 需先修**微积分**和**线性代数**



教学工具



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》第一章

课程简介

课程介绍

教学工具

课程安排

参考资料

工程数值问题

数值分析简介

数值问题举例

科学计算的发展

计算机中的数

数学常数

二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源

误差与相对误差

误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播

病态问题

数值稳定

避免误差危害

编程实践

4/42

荷塘 雨课堂 课堂互动



课堂 微信群 通知答疑



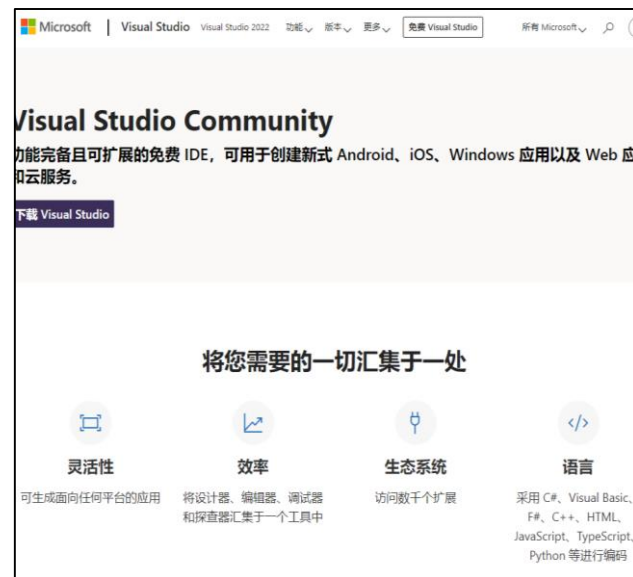
网络学堂 课件和作业



腾讯 会议 线上上课



开发环境 Visual Studio Community 数值实验



课程安排

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

5/42

周数	内容	备注
1	第一章：绪论	时间 每周三、周五上午第二大节 9:50~11:25 线上课程 腾讯会议号提前一天发布 线下课程 C1-308教室 编程环境 请同学们各自准备 不具备条件时可两人共享
2	第二章：线性方程组的直接解法	
3		
4	第三章：线性方程组的迭代解法	
5		
6	第四章：非线性方程和方程组的数值解法	
7		
8	第五章：插值法	
9		
10	第六章：函数逼近	
12	第七章：数值积分和数值微分	
13		
14	第八章：常微分方程	
15		
16	总复习	

课程简介

课程介绍

教学工具

课程安排

参考资料

工程数值问题

数值分析简介

数值问题举例

科学计算的发展

计算机中的数

数学常数

二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源

误差与相对误差

误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播

病态问题

数值稳定

避免误差危害

编程实践

✓ 考核方式

出勤 (10%) + 作业 (35%) + 期末考试 (55%)

• 关于出勤 缺勤1次扣1分

• 关于作业 仅**书面作业**计分，每章分别占总分5%，**切勿抄袭!**

编程作业帮助同学们理解数值计算的概念，培养同学们编码的能力，但不做强制要求，建议大家按进度按要求完成

• 关于考试 **开卷**，但仅能携带1本教材进入考场，可以携带不带编程功能的科学计算器，但不能携带电脑

课程简介

课程介绍

教学工具

课程安排

参考资料

工程数值问题

数值分析简介

数值问题举例

科学计算的发展

计算机中的数

数学常数

二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源

误差与相对误差

误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播

病态问题

数值稳定

避免误差危害

编程实践



数值方法, 关治、陆金甫
清华大学出版社, 2018重印



数值分析学习指导, 关治
清华大学出版社



数值分析 (第5版), 李庆扬等
清华大学出版社

课程简介

课程介绍

教学工具

课程安排

参考资料

工程数值问题

数值分析简介

数值问题举例

科学计算的发展

计算机中的数

数学常数

二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源

误差与相对误差

误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播

病态问题

数值稳定

避免误差危害

编程实践

8/42

● C# 编程环境

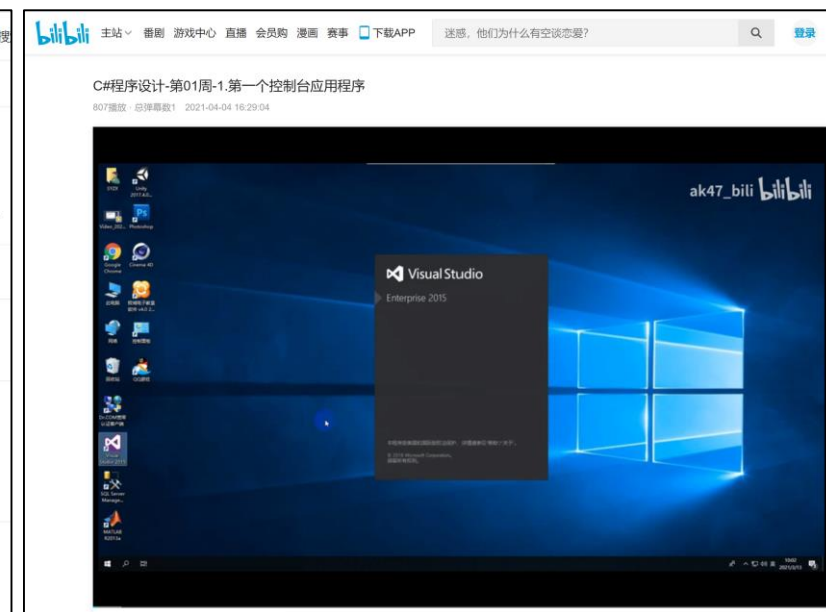
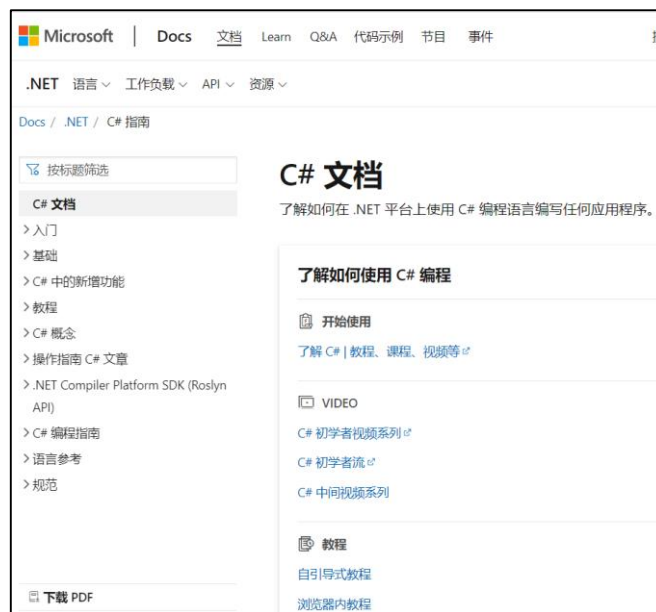
Visual Studio: <https://visualstudio.microsoft.com/zh-hans/vs/community/>

● 参考网络资源

菜鸟教程: <https://www.runoob.com/csharp/csharp-tutorial.html>

Microsoft C#文档: <https://docs.microsoft.com/zh-cn/dotnet/csharp/>

一些入门视频教程, 例如: <https://www.bilibili.com/video/BV1eB4y1P7Jt>



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

1.1 课程简介

1.2 工程中的数值问题

1.3 计算机中的数

1.4 误差与有效数字

1.5 数值稳定性

1.6 编程实践

数值分析简介



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》第一章

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介

数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

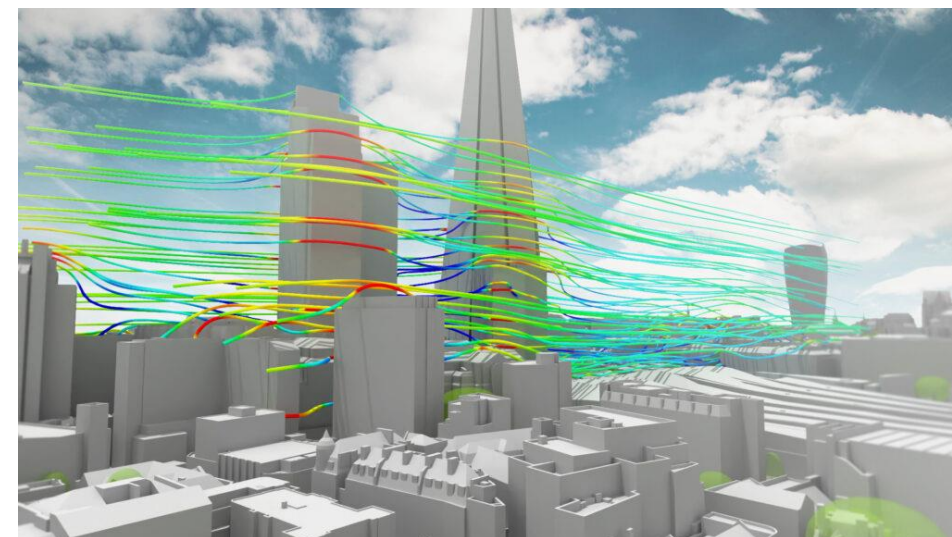
误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

- ✓ 研究用**计算机求解数学计算问题**的数值计算方法及其理论的学科
- ✓ 核心：**算法构造**和**误差分析**
- ✓ 特点：立足于**近似**，追求可用结果
- ✓ 工程应用广泛，如各种有限元求解软件、作业优化、天气预报.....



数值问题举例—结构位移及自振频率



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》第一章

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

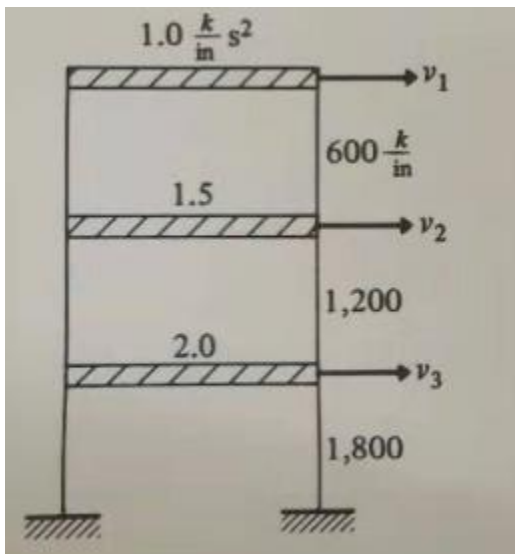
误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

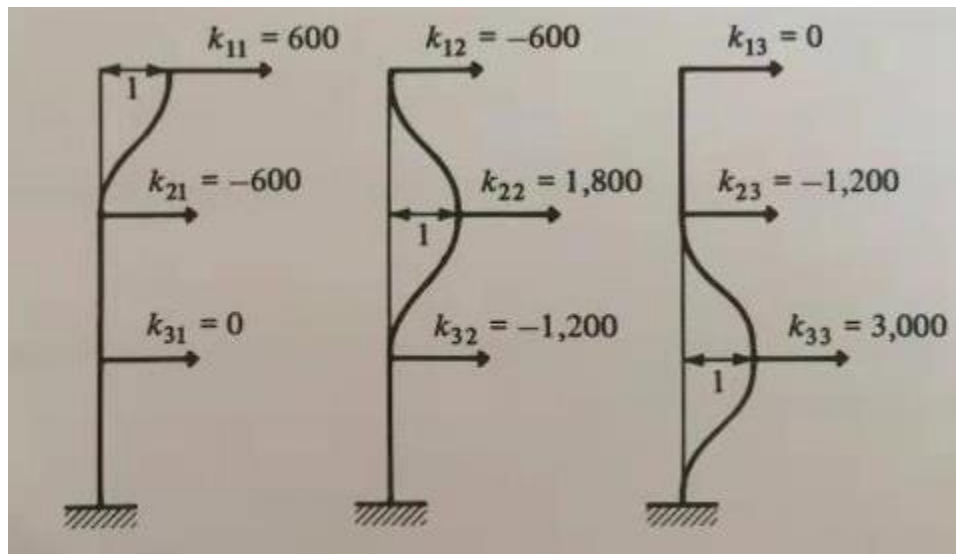
11/42

- ✓ 一个三层框架结构，已知层质量和层间刚度，求侧向力下的位移和自振频率

求侧向力 $\vec{F}$ 下的位移



$$\frac{k}{in} s^2 \approx 39370 kg$$



k_{ij} 为第 j 个节点的单位位移引起第 i 个节点的外力

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

质量矩阵

$$\mathbf{K} = 600 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

刚度矩阵

$$\mathbf{K}\vec{\delta} = \vec{F}$$

线性方程组

$$\vec{\delta} = ?$$

求自振频率

$$\mathbf{K}\vec{x} = \omega^2 \mathbf{M}\vec{x}$$

矩阵行列式、特征值

$$\omega = ?$$

数值问题举例—结构整体刚度矩阵



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

✓ 更为一般的，结构力学求解中的刚度矩阵 K

$$K = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & \dots & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

✓ 通常方法求解变得非常困难

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

对于 n 阶方程，克莱姆法则中，每一个行列式需要 $(n-1)*n!$ 次乘法，共 $n+1$ 个行列式需要计算，故共 $(n+1)(n-1)*n!$ 次乘法（另外还有额外 n 次除法）

若 $n=100$ ，则约为 10^{162} 次乘法！目前世界第一的超算 10^{18} Flop/s（每秒浮点运算数）

✓ K 具有**大型稀疏**和**带状**特征

若采用**“追赶法”**，计算量仅为 $5n-4$ 次乘除法，另外增加 $3n-2$ 次乘除运算

详见第二章：线性方程组的直接解法

数值问题举例—福岛核废水扩散



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》第一章

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

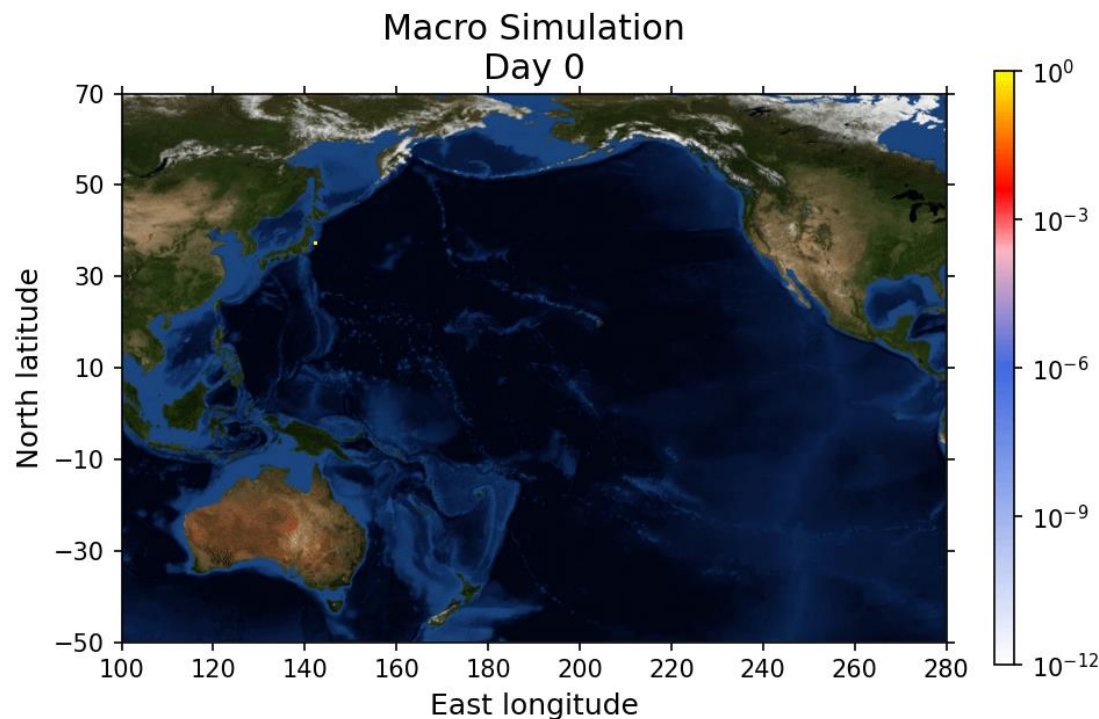
误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

13/42



氚扩散宏观模拟



Impact Factor

17.275

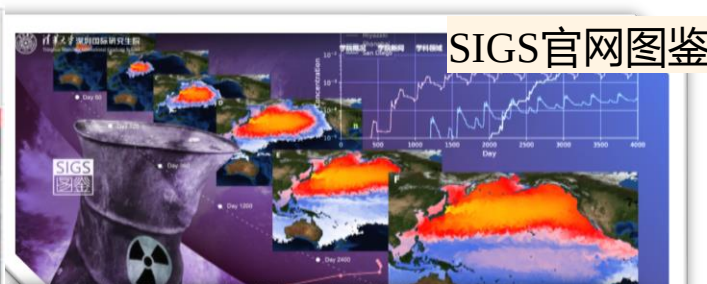
5 year Impact Factor

17.584

Multidisciplinary

Sciences

3 out of 73



清华官网新闻



在排放的**1年后**，污染物将影响北太平洋**超过一半**的区域，并且东亚大部分沿岸海域都将被污染物覆盖
大约**3.3年后**，污染物将分别向东和向南抵达北美及澳洲沿岸海域，此时污染物几乎覆盖了**整个北太平洋**
大约**5年后**，在赤道洋流的作用下，污染物将沿着美洲海岸往**南太平洋**迅速扩散

Yi Liu, et al, **Discharge of treated Fukushima nuclear accident contaminated water: macroscopic and microscopic simulations**. *National Science Review*, 2022, 9(1); nwab209
2项发明专利：① 基于粒子运动的水体污染扩散模拟预测方法和装置；② 基于浓度分析的水体污染扩散模拟预测方法和装置

数值问题举例—物质扩散方程



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》第一章

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

14/42

菲克定律：单位时间内通过垂直于扩散方向的单位截面积的扩散物质流量与该截面处的浓度梯度成正比

$$J = -D \frac{\partial c}{\partial x}$$

J 为扩散通量， D 为扩散系数， $\partial c / \partial x$ 为浓度梯度

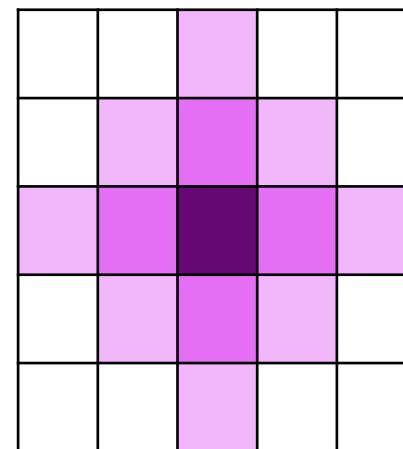
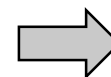
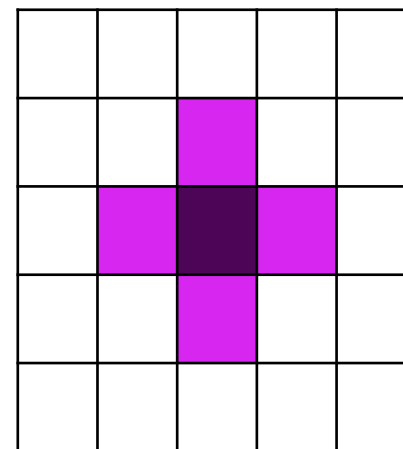
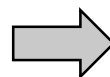
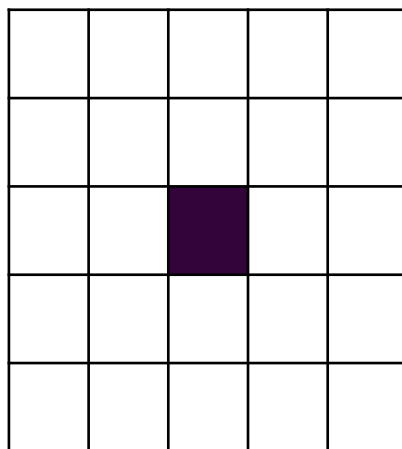
$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

有限、离散

静水中，若已知物质的初始浓度和扩散系数，求一段时间后物质的浓度分布？

偏微分方程！

菲克第二定律（扩散第二方程），其中假设扩散系数与浓度无关



数值问题举例—Navier-Stokes方程



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》第一章

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

15/42

N-S方程：粘性不可压缩流体动量守恒的运动方程

$$F = \underbrace{-\nabla P}_{\text{压差}} - \underbrace{\rho \nabla \phi}_{\text{重力}} + \underbrace{\eta \nabla^2 v}_{f_{\text{visc}}}$$

$$ma = \rho \frac{\Delta v}{\Delta t} = \rho \left[(v \cdot \nabla) v + \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

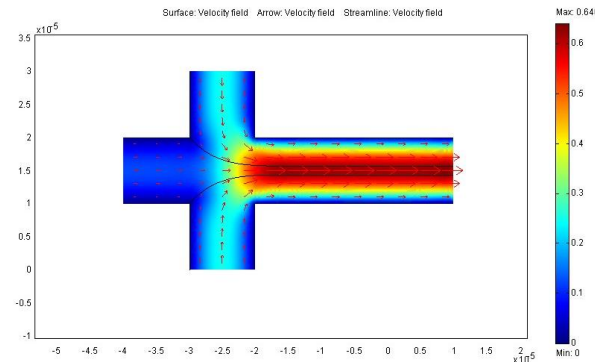
⇒ ~~$$\rho \left[(v \cdot \nabla) v + \frac{\partial v}{\partial t} \right] = -\nabla P - \rho \nabla \phi + \eta \nabla^2 v$$~~

由此可见，仅仅是最简单的物理原理，但是面对现实的工程问题，其模型的计算都有可能非常复杂！



在微流体的情况下， v 不大、 ρ 不大， η 的影响较显著，驱动压力与粘滞力平衡

$$\nabla^2 v = \frac{1}{\eta} \nabla P \quad \text{泊松方程}$$



科学计算的发展—隐藏的流体力学



清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》第一章

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例

科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

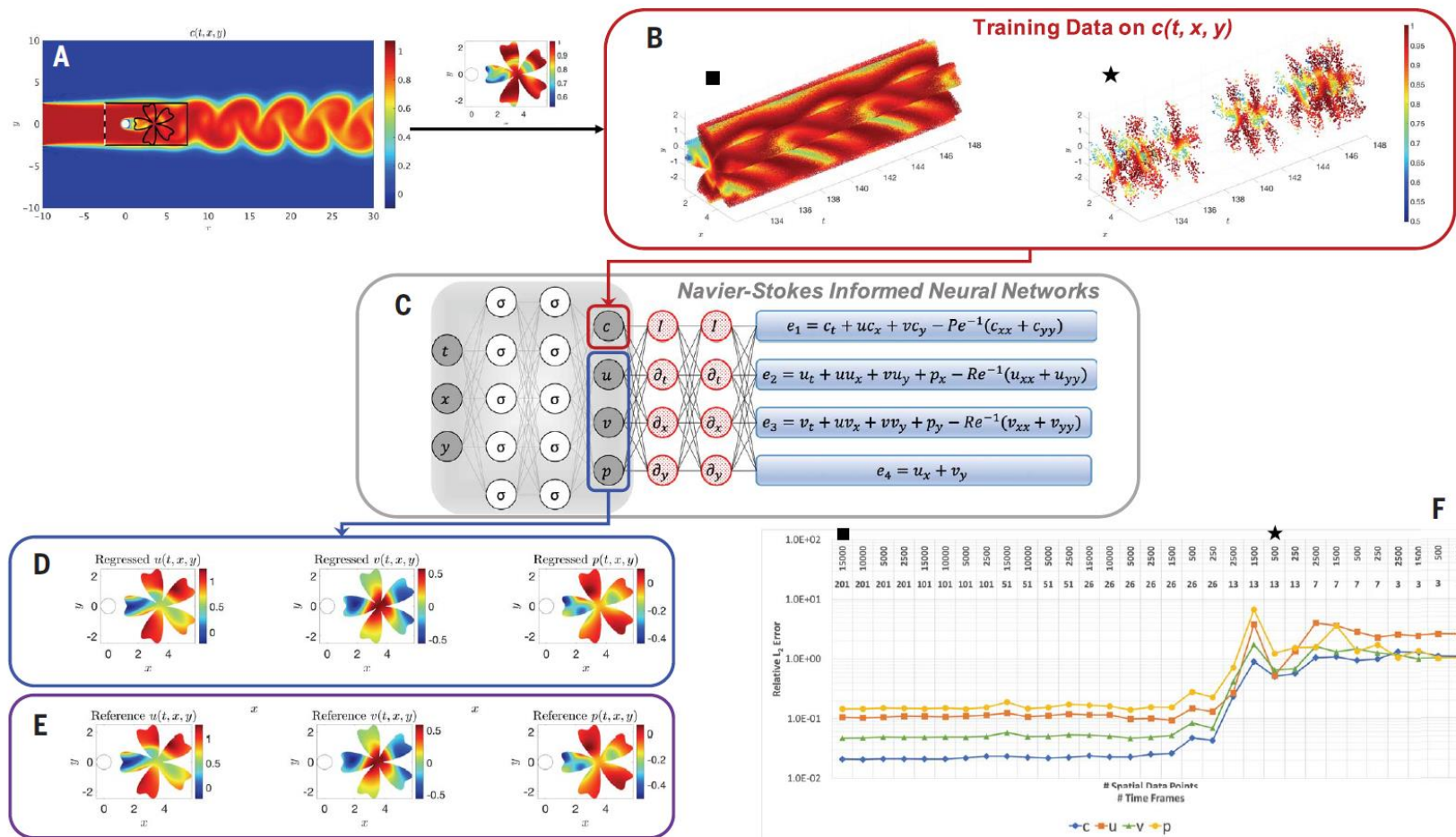
编程实践

流体的**流动模式**可以用N-S方程来描述

提出一种基于物理的深度学习框架 (HFM)

HFM将N-S编码到神经网络中

实现直接从图像中提取速度和压力场



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

1.1 课程简介

1.2 工程中的数值问题

1.3 计算机中的数

1.4 误差与有效数字

1.5 数值稳定性

1.6 编程实践

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数

二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

- ✓ 数学常数的值**独立于**所有物理测量
- ✓ 圆周率 π 、自然常数 e 、黄金分割比 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- ✓ 数学常数在土木与海洋工程中的用途十分广泛（以 π 为例）

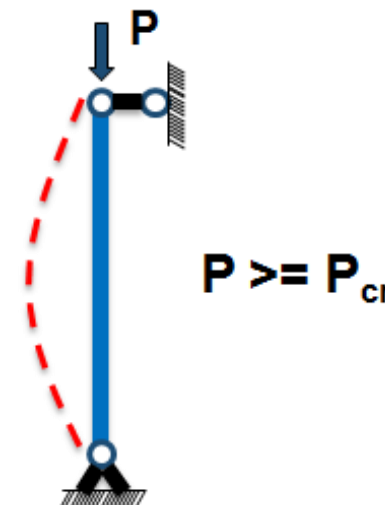
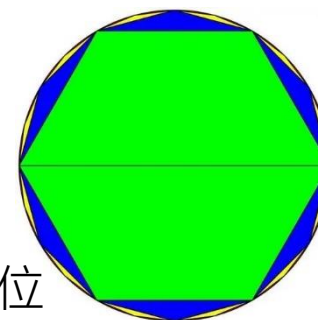
➤ 结构中压杆的临界荷载-**欧拉公式**: $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$

➤ 波浪中波数与波长: $k = 2\pi/L$

➤ 信号中圆频率与周期: $\omega = 2\pi/T$

- ✓ 问题

南北朝祖冲之割圆法算到小数点后7位



如何在计算机中表示这些数学常数（如无限不循环的 π ）？

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

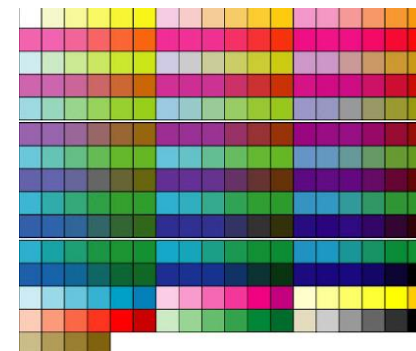
数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

- ✓ 计算机中信息的基本单位是**bit**，可以表示0和1两个状态
- ✓ 各个bit之间互相独立， N 个bit可表示 2^N 种互不相同的状态

计算机图形学中的256色(2^8)就是RGB由8位的bits表示



- ✓ 如何用bit表示自然数?

十进制 $\Leftrightarrow$ **二进制**

$$\alpha = \sum_{i=0}^n b_i \cdot 2^i \Leftrightarrow b_n \cdots b_1 b_0 \quad (b_i = 0 \text{ or } 1)$$

$$\boxed{11} = 8 + 2 + 1 = 2^3 + 2^1 + 2^0 \Rightarrow \boxed{1011}$$

十进制

二进制

请同学们将10
转为二进制

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

✓ 如何用bit表示负整数?

➤ 用一个单独的符号位记录正负状态

$$\text{➤ } \alpha = (-1)^{b_s} \cdot \sum_{i=0}^n b_i \cdot 2^i \Leftrightarrow b_s b_n \cdots b_1 b_0$$

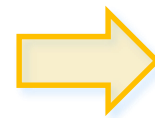
✓ 如何用bit表示小数?

➤ 将指数位 i 从自然数扩展到所有整数, 如 $2^{-2} = 0.25$

$$\text{➤ } \alpha = (-1)^{b_s} \cdot \sum_{i=m}^n b_i \cdot 2^i \Leftrightarrow b_s b_n \cdots b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \cdots b_m, (m < 0)$$

请同学们将0.1875
转为二进制!

计算机中使用固定的有限
的bit来近似表示实数



0.1用有限位数的二进
制数如何表示?

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

✓ 选择计算机的数据表示要考虑的因素

➤ 数据类型（整数，小数，实数和复数） ➤ 精确度

➤ 数值范围 ➤ 数据存储和处理所需要的硬件代价

✓ **定点数**：采用固定数量的整数位和小数位来表示实数

➤ 如：小数点固定在第4位和第5位之间的8位定点数

• 表示为 $b_3b_2b_1b_0b_{-1}b_{-2}b_{-3}b_{-4}$ 范围： $0 \sim (2^4 - 2^{-4})$
精度： 2^{-4}

能够表示的范围和精度有限

位的利用程度有限（存储较大数/较小数时部分位始终为0）

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

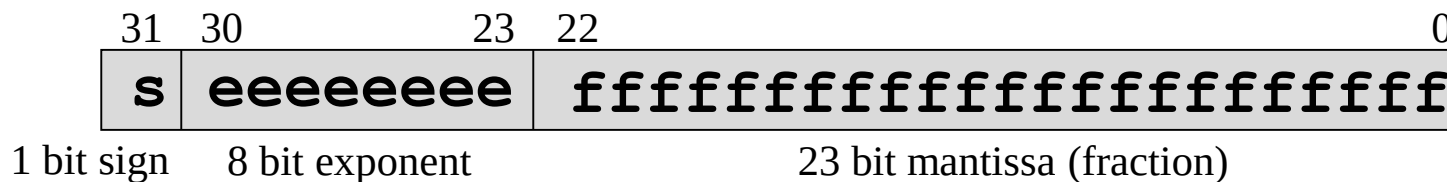
数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

✓ **浮点数**：小数点的位置不固定，是定点数的一种改进

- 借鉴了科学计数法，将实数表示为 $(-1)^s \times m \times 2^e$ 的形式
- Standard IEEE-754 Single Precision Floating-Point (32位)



- Case 1: $0 < e < 255 \Rightarrow (-1)^s \times 2^{e-127} \times (1. ff \cdots f)$
- Case 2: $e = 0$, $\begin{cases} f = 0 \Rightarrow (-1)^s \times 0 \\ f \neq 0 \Rightarrow (-1)^s \times 2^{-126} \times (0. ff \cdots f) \end{cases}$
- Case 3: $e = 255$, $\begin{cases} f = 0 \Rightarrow (-1)^s \times \infty \\ f \neq 0 \Rightarrow \text{NaN} \end{cases}$

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制

定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

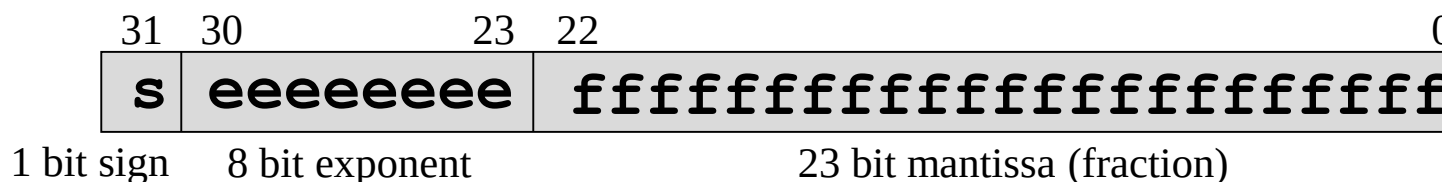
数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

✓ **浮点数**：小数点的位置不固定，是定点数的一种改进

- 借鉴了科学计数法，将实数表示为 $(-1)^s \times m \times 2^e$ 的形式
- Standard IEEE-754 Single Precision Floating-Point (32位)



- 精度： $\alpha = \pm 2^{-126} \times (0.00 \dots 01) = \pm 2^{-126} \times 2^{-23} = \pm 2^{-149}$
- 范围： $\alpha = \pm 2^{127} \times (1.11 \dots 1) = \pm 2^{127} \times (2 - 2^{-23})$

注意：此时精度变为 $\pm 2^{127} \times 2^{-23} = \pm 2^{104}$

由此可见，一个浮点数的动态范围极大，但是精度取决于指数项

——参考《IEEE 754浮点数标准详解》<http://c.biancheng.net/view/314.html>



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

1.1 课程简介

1.2 工程中的数值问题

1.3 计算机中的数

1.4 误差与有效数字

1.5 数值稳定性

1.6 编程实践

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

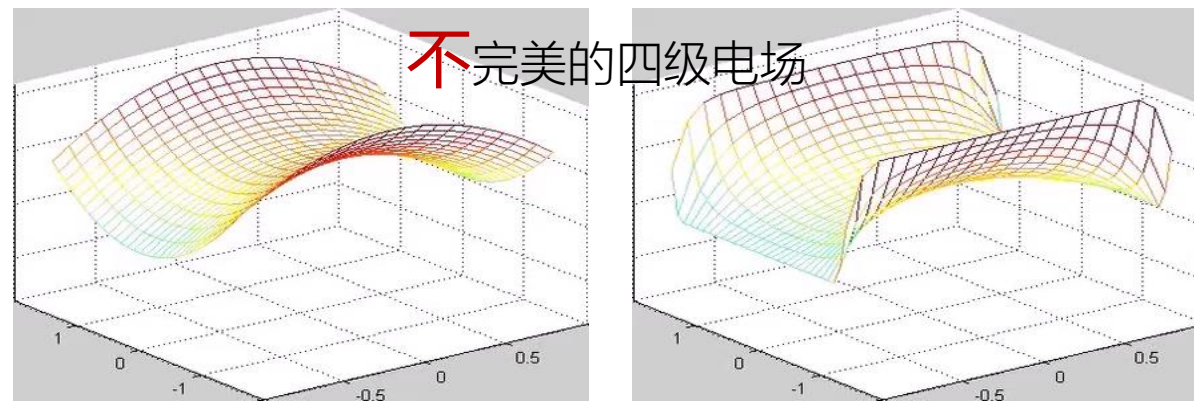
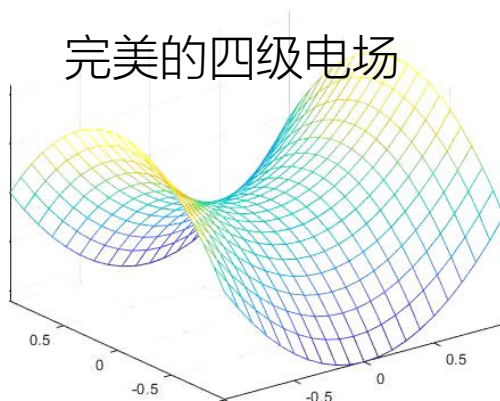
数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

✓ **输入**数据误差：输入的数据的不可靠，观测误差、测量误差

✓ **数学模型**误差



✓ **舍入**误差：**有限**位数二进制浮点数表示无限的实数

例如： π 取3.1416（舍入）或3.1415（切断）

✓ **截断**误差：**有限**的计算过程替代无限的计算过程

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

- ✓ 设 x 是某个实数的精确值, x_A 是其一个近似值

绝对误差: $e = x - x_A$, 简称**误差**

相对误差: $e_r = e/x = (x - x_A)/x$, $x \neq 0$

- ✓ 由于精确值往往未知, 所以相对误差也可表达为 e/x_A

注意适用条件:
$$\frac{e}{x} - \frac{e}{(x+e)} = \frac{e^2}{x(x+e)} = \frac{e_r^2}{1+e_r}$$

当 e_r 很小时, 两者的差异才可以忽略不计

——参考教材: 定义 1.4.1

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差

误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

- ✓ 设 x 是某个实数的精确值, x_A 是其一个近似值, 若 ε_A 满足

$$\varepsilon_A \geq |x - x_A| = |e|$$

则 ε_A 是 e 的绝对值的一个上界, 称为**绝对误差界**或**误差界**

- ✓ 相应的, $x \neq 0$ 时, 称 $\varepsilon_A/|x|$ 为 x_A 的**相对误差界**

$\pi = 3.14159 \dots$, 取近似值 $\pi^* = 3.14$, 则0.002是 π^* 的一个误差界

- ✓ 对于常用的四舍五入法, 若某 x_A 的最后数位的数量级为 10^n , 那么可以取其误差界

$$\varepsilon_A = \frac{1}{2} \times 10^n$$

有效数字!

误差界可以取为**被保留的最后数位上的半个单位**

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

- ✓ 左边的第一个非0数字起，到末位数字止的所有数字（直观）
- ✓ 设 x 是某个实数的精确值， x_A 是其一个近似值，若

$$x_A = \pm 10^k \times 0.a_1 a_2 \cdots a_n \rightarrow a_1 a_2 \cdots a_k . a_{k+1} \cdots a_n \cdots$$

其中： a_i 为0~9之间的整数、 k 为整数、 $a_1 \neq 0$ ；且

$$|x - x_A| \leq \frac{1}{2} \times 10^{k-n}$$

称 x_A 具有 n 位**有效数字**，例如 $\pi^* = 3.14$ 具有3位有效数字

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

定理 1.4.1 (教材中编号)

(1) 如果 x_A 具有 n 位有效数字, 则: $\frac{|x - x_A|}{|x_A|} \leq \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$

(2) 如果 $\frac{|x - x_A|}{|x_A|} \leq \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{1-n}$, 则 x_A 至少具有 n 位有效数字

证明: $a_1 \times 10^{k-1} \leq |x_A| \leq (a_1 + 1) \times 10^{k-1}$

$$\frac{|x - x_A|}{|x_A|} \leq \frac{0.5 \times 10^{k-n}}{a_1 \times 10^{k-1}} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{1-n}$$

(1) 得证

$$|x - x_A| \leq (a_1 + 1) \times 10^{k-1} \times \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{1-n} = \frac{1}{2} \times 10^{k-n}$$

(2) 得证

这一定理告诉我们: 相对误差界直接和有效数字位数 n 相关!

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

1.1 课程简介

1.2 工程中的数值问题

1.3 计算机中的数

1.4 误差与有效数字

1.5 数值稳定性

1.6 编程实践

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播

病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

- ✓ 一般的，假定对于一元函数 f 二阶连续可导；以 x 的近似值 x_A 来计算该函数的近似值

函数 $f(x)$ 在 x_A 附近的泰勒展开

$$f(x) = f(x_A) + f'(x_A)(x - x_A) + \frac{f''(x_A)}{2}(x - x_A)^2 \dots$$

$$|f(x) - f(x_A)| \leq |f'(x_A)| |x - x_A| + \frac{|f''(\xi)|}{2} |x - x_A|^2 \quad \xi \text{ 在 } x \text{ 到 } x_A \text{ 之间}$$

结论： $|f(x) - f(x_A)| \leq |f'(x_A)| |x - x_A|$

推论： $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_{1A}, x_{2A}, \dots, x_{nA})| \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_A |x_k - x_{kA}|$

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播

病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

$$\left| f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_{1A}, x_{2A}, \dots, x_{nA}) \right| \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right)_A |x_k - x_{kA}|$$

可以以此再分析以下四则运算的误差界：

$$(x + y) - (x_A + y_A) = \varepsilon_x + \varepsilon_y$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad |(x_1 + x_2) - (x_{1A} + x_{2A})| \leq |x_1 - x_{1A}| + |x_2 - x_{2A}|$$

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \Rightarrow \quad |x_1 x_2 - x_{1A} x_{2A}| \leq |x_{2A}| |x_1 - x_{1A}| + |x_{1A}| |x_2 - x_{2A}|$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_{1A}}{x_{2A}} \right| \leq \frac{1}{|x_{2A}|} |x_1 - x_{1A}| + \frac{|x_{1A}|}{|x_{2A}|^2} |x_2 - x_{2A}| = \frac{|x_{2A}| |x_1 - x_{1A}| + |x_{1A}| |x_2 - x_{2A}|}{|x_{2A}|^2}$$

$$xy - x_A y_A = x_A \varepsilon_y + y_A \varepsilon_x$$

病态问题和条件数



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播

病态问题

数值稳定
避免误差危害

编程实践

$$|f(x) - f(x_A)| \leq |f'(x_A)| |x - x_A|$$

定义:

$$C = \left| \frac{\frac{f(x) - f(x_A)}{x - x_A}}{\frac{f(x)}{x}} \right| \approx \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|$$

为计算函数值的**条件数**

数值稳定-增加复杂的多步计算



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题

数值稳定

避免误差危害

编程实践

- ✓ 一种算法，如果初始数据微小的改变引起最终结果的改变也是微小的，则称此算法是**数值稳定**的，反之则是数值不稳定的
 - 假定初始误差 ε_0 ，计算 n 步后误差 ε_n
 - 如果 $|\varepsilon_n| \approx Cn\varepsilon_0$ ， C 为与 n 无关的常数，误差增长为**线性型**
 - 如果 $|\varepsilon_n| \approx C^n\varepsilon_0$ ，误差增长为**指数型**

$$\text{计算积分 } I_n = e^{-1} \int_0^1 x^n e^x dx, n = 0, 1, \dots$$

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定

避免误差危害

编程实践

✓ 避免有效数字的损失

□ 计算 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ 时, 当 $|x|$ 较小时, 可改为 $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} + 1}$

$9 + \sqrt{80}$ $9 - \sqrt{80}$ 哪个比较容易出问题? $b^2 \gg |ac|$ 时 $x_2 = \frac{c}{ax_1}$

□ 使用单精度浮点数计算 $10^8 + 1 - 10^8$ 时, 结果将为 0??!

$$x = 101 + \boxed{\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{100}}$$

✓ 减少运算次数

10次乘法和4次加法 → 4次乘法和4次加法

□ 计算 $p_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, 直接计算需要几次乘法和几次加法; 如果改为

$$p_4(x) = ((a_4x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

秦九韶算法

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

1.1 课程简介

1.2 工程中的数值问题

1.3 计算机中的数

1.4 误差与有效数字

1.5 数值稳定性

1.6 编程实践

①鼠标右键点
击项目名称

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

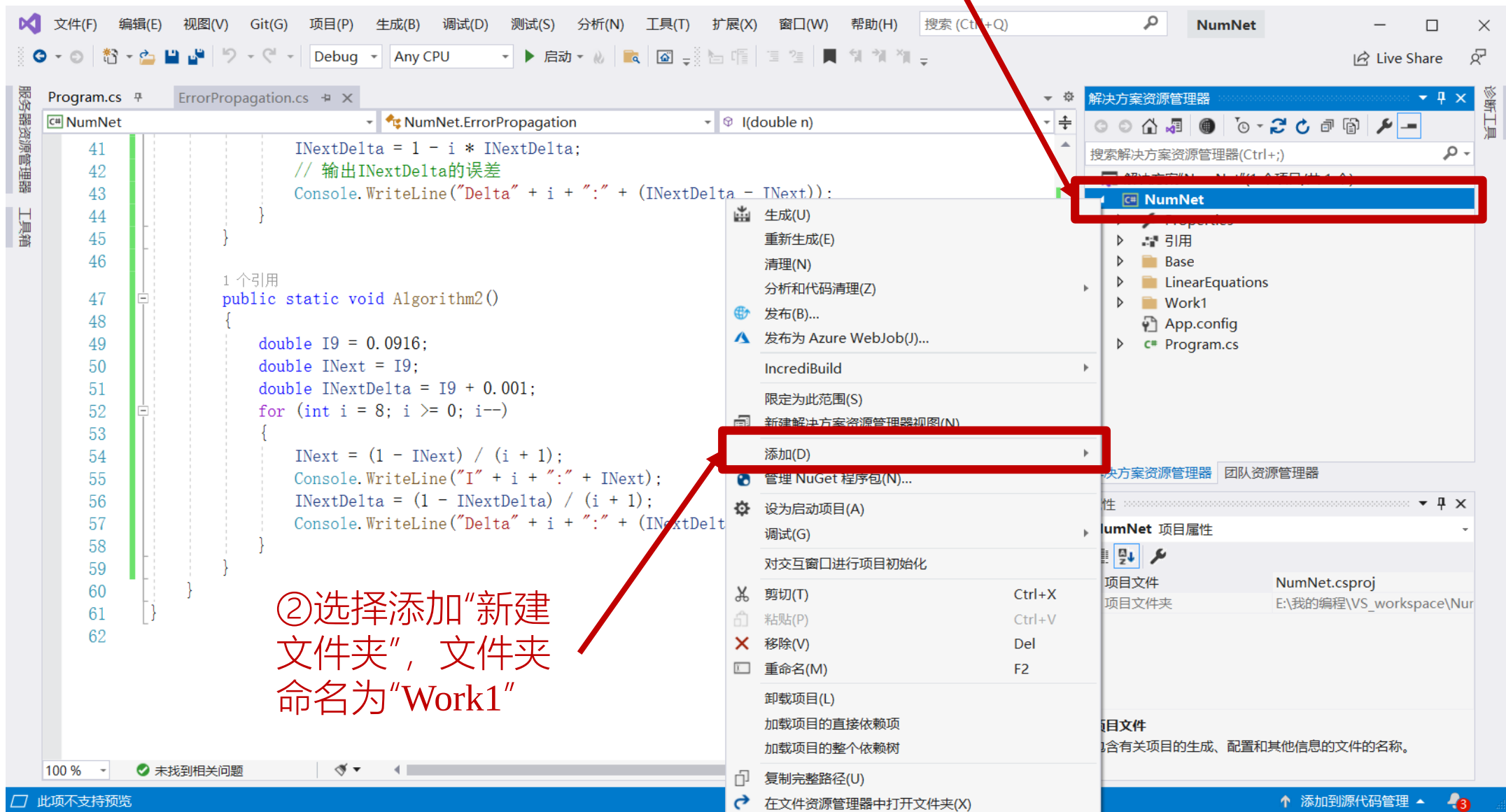
误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

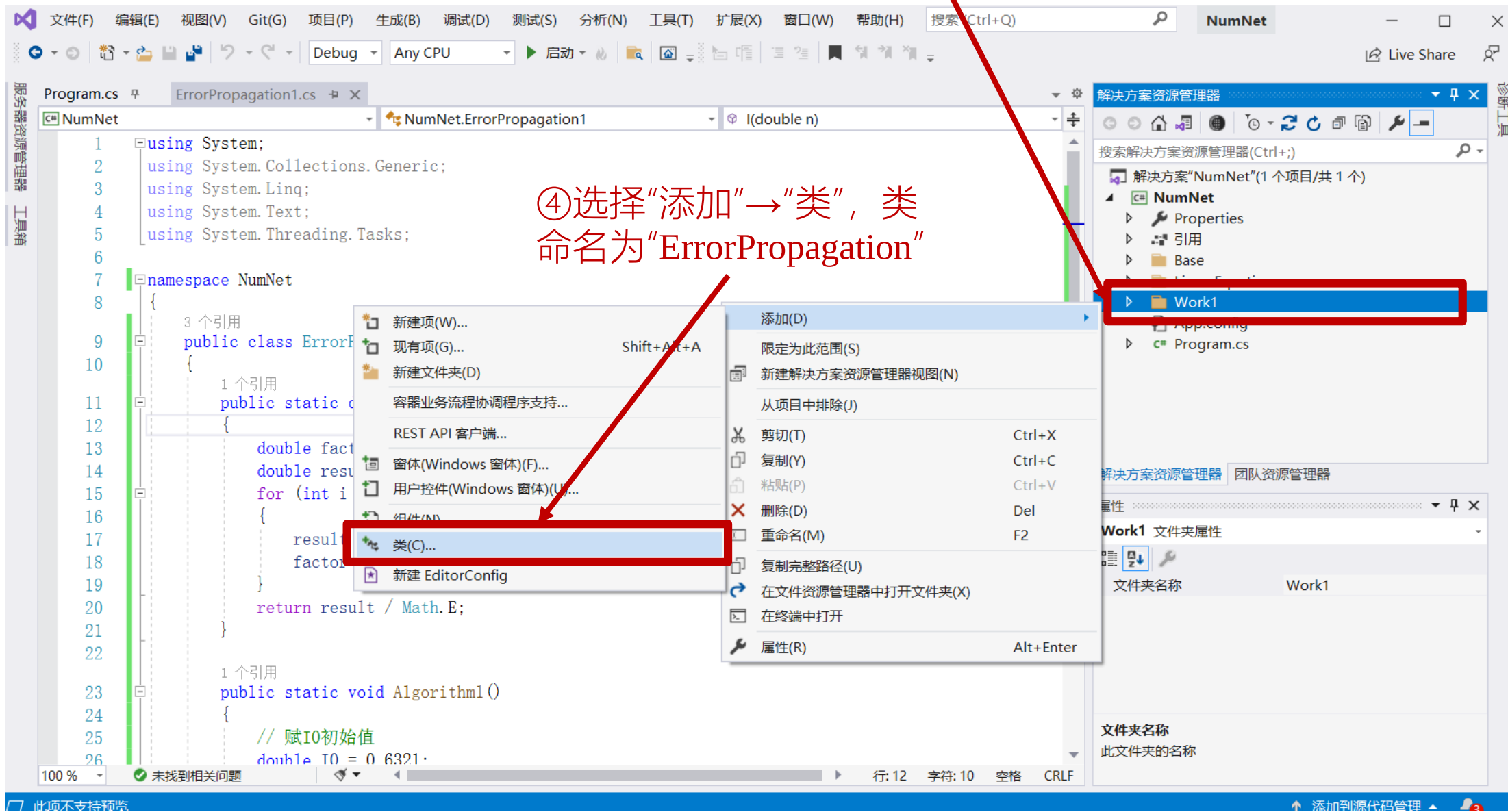
误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

38/42

③鼠标右键点击
新建的文件夹

④选择“添加”→“类”，类
命名为“ErrorPropagation”



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

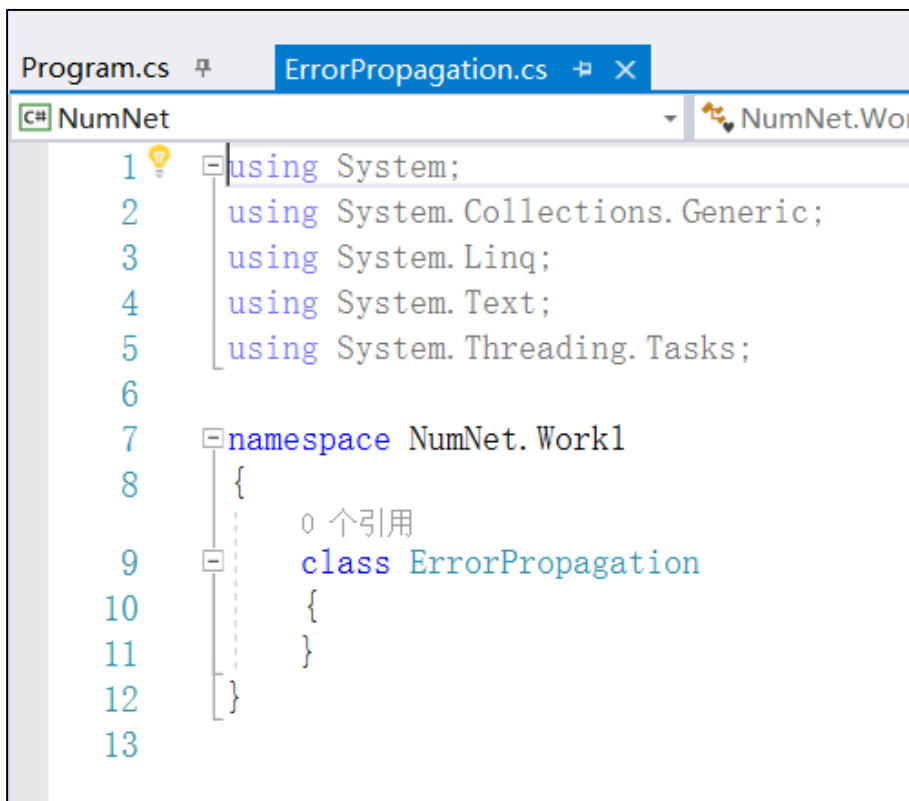
误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

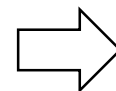
误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

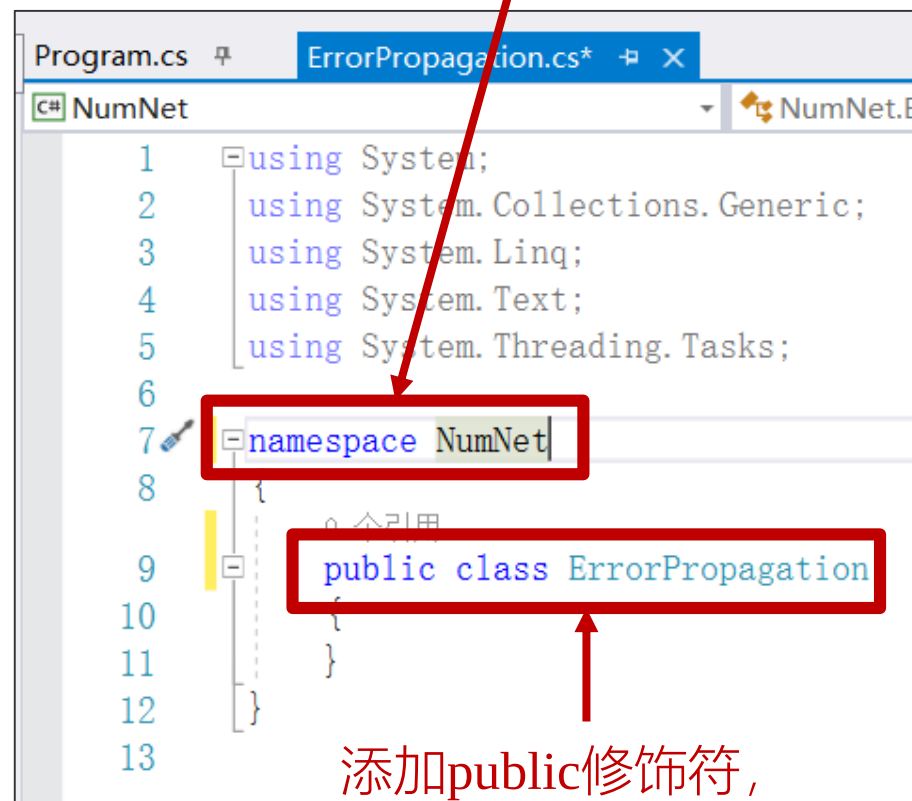
✓ 经过以上步骤，我们就创建了一个名为ErrorPropagation的类，
接下来我们对这个类做一些小修改



```
1 using System;
2 using System.Collections.Generic;
3 using System.Linq;
4 using System.Text;
5 using System.Threading.Tasks;
6
7 namespace NumNet.Work1
8 {
9     class ErrorPropagation
10     {
11     }
12 }
13
```



移除命名空间后面的
.Work1，便于访问



```
1 using System;
2 using System.Collections.Generic;
3 using System.Linq;
4 using System.Text;
5 using System.Threading.Tasks;
6
7 namespace NumNet
8 {
9     public class ErrorPropagation
10     {
11     }
12 }
13
```

添加public修饰符，
便于访问

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

✓ 在ErrorPropagation的类体中添加Algorithm1方法

```
public class ErrorPropagation
```

```
{
```

```
    public static void Algorithm1()
```

```
{
```

```
    // 赋I0初始值
```

```
    double I0 = 0.6321;
```

```
    // 迭代变量INext初值赋为I0
```

```
    double INext = I0;
```

```
    // 迭代
```

```
    for (int i = 1; i < 10; i++)
```

```
{
```

```
        // 迭代第一次, INext变为I1, 类推
```

```
        INext = 1 - i * INext;
```

```
        // 输出INext
```

```
        Console.WriteLine("I" + i + ":" + INext);
```

```
    }
```

```
}
```

```
}
```

$$\begin{cases} I_n = 1 - nI_{n-1} \\ I_0 = e^{-1} \int_0^1 e^x dx = 1 - e^{-1} \approx 0.6321 \end{cases}$$

课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界
有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定
避免误差危害

编程实践

✓ 在Program类 (Program.cs文件) 的Main函数中写如下代码,
然后运行程序

```
public class Program
{
    public static void Main(string[] args)
    {
        Console.WriteLine("Algorithm1");
        ErrorPropagation.Algorithm1();

        Console.ReadKey();
    }
}
```

```
Algorithm1
I1:0.3679
I2:0.2642
I3:0.2074
I4:0.1704
I5:0.14800000000000001
I6:0.11199999999999997
I7:0.21600000000000024
I8:-0.72800000000000193
I9:7.552000000000174
```

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.6321	0.3679	0.2642	0.2074	0.1704	0.1480	0.1120	0.2160	-0.7280	7.552



课程简介

课程介绍
教学工具
课程安排
参考资料

工程数值问题

数值分析简介
数值问题举例
科学计算的发展

计算机中的数

数学常数
二进制
定点数与浮点数

误差与有效数字

误差的来源
误差与相对误差
误差界

有效数字

数值稳定性

误差的传播
病态问题
数值稳定

避免误差危害

编程实践

- 了解数值分析的基本概念及特点
- 了解定点数与浮点数的特定和区别
- 掌握**绝对误差**、**相对误差**和**误差界**的概念
- 掌握**有效数字**的定义和计算方法
- 正确理解**误差的传播**和**条件数**，了解病态问题的特点和从误差角度分析对比算法数值稳定性的方法

作业

教材P35-36中的3、4、5题