Tsinghua Shenzhen International Graduate School 清华大学深圳国际研究生院

工程硕士数学

第八章 常微分方程的数值解

胡振中 副教授

海洋大楼 702-3，15999640239（微信同号）

邮箱：huzhenzhong@tsinghua.edu.cn

个人网站：http://www.huzhenzhong.net

内容提纲

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

8.1 概论及背景知识
8.2 简单数值方法
8.3 Runge-Kutta法
8.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性
8.5 线性多步法
8.6 一阶方程组与高阶微分方程的初值问题
8.7 编程实践（穿插在各小结中）

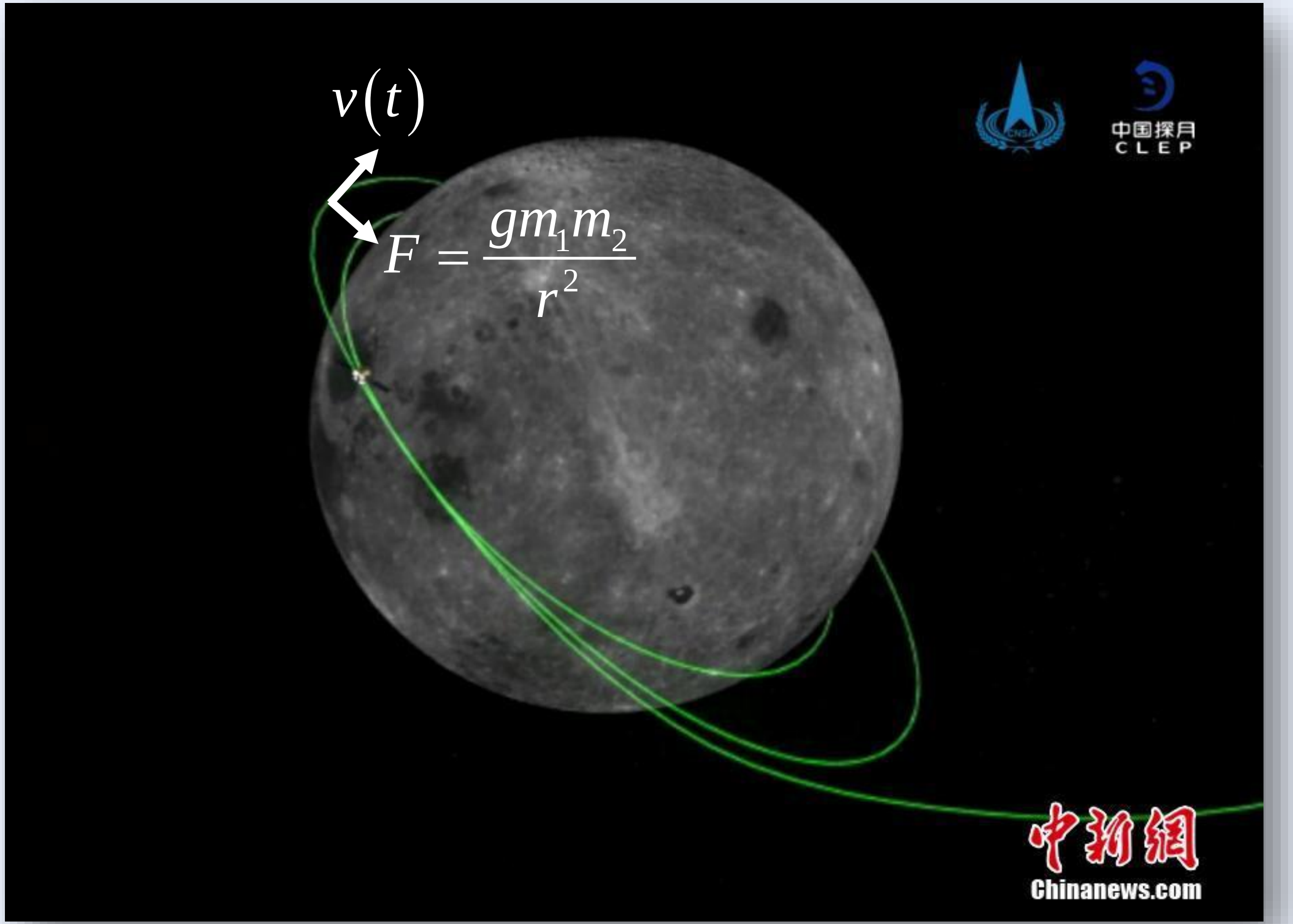
概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

以卫星运行轨道为例

当两个物体质量相差非常大时，大质量物体可以近似认为固定在坐标系原点处，则小质量物体的运动方程为

$$m_1 \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\frac{g m_1 m_2 x_i}{\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

x_i为空间三维坐标



微分方程组 **单体问题**

本章研究的问题

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

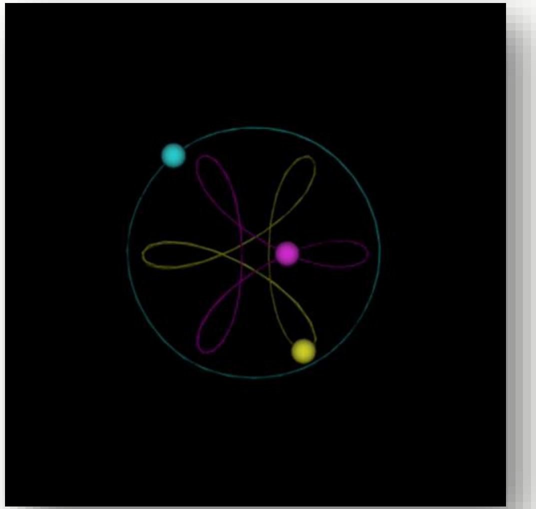
如果多个物体的质量相当

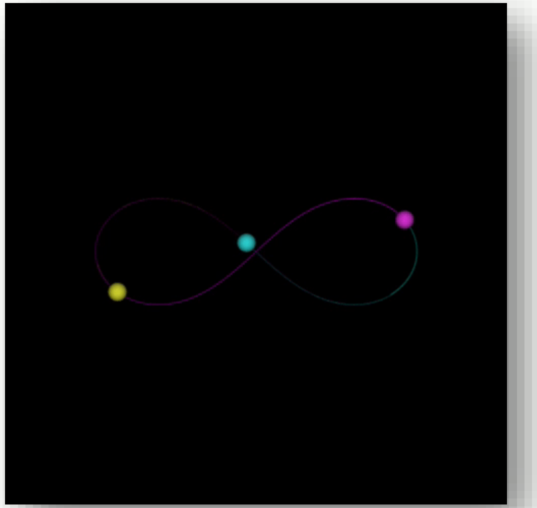
比如三体！

$$m_1 \frac{d^2 x_{1i}}{dt^2} = \frac{g m_1 m_2 \left(x_{2i} - x_{1i}\right)}{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \left(x_{2i} - x_{1i}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}_{\text{物体2对物体1的作用}}} + \frac{g m_1 m_3 \left(x_{3i} - x_{1i}\right)}{\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \left(x_{3i} - x_{1i}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}_{\text{物体3对物体1的作用}}}, i = 1, 2, 3$$

另外两个物体也有同样的三个方程，一共9个方程！

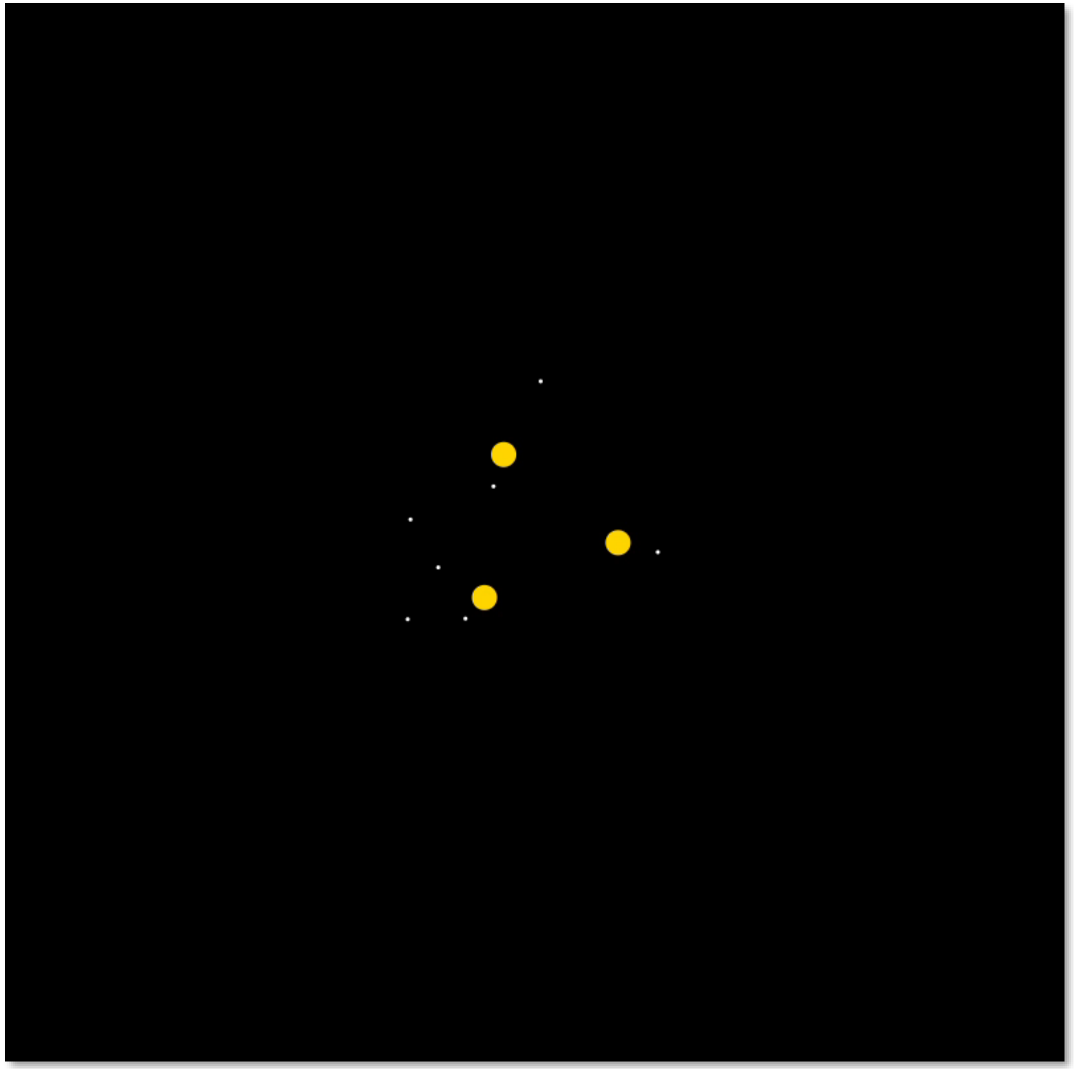
Jules Henri Poincare
1854.4-1912.7





本章研究的问题

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践



Based on taichi

本章研究的问题

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

首先讨论微分方程中最简单的形式，一阶**常微分方程的初值问题**：令$y = y(x)$，为$x \in [a, b]$上的函数，且$f(x, y)$为xy平面上某一区域D上的连续函数

考虑方程 $\boxed{\frac{dy}{dx}} = f(x,y)$ ⇨ $\int dy = \int f(x,y)\,dx$ ⇨ 原函数$F(x,y) + C$有无穷多个

左边整理成简单的一阶微分形式

增加一个条件$y(x_0) = y_0$ **初值问题**

⇨ 如果$y^* = y(x)$满足以上方程，则称为初值问题的解

① y^*是否存在且唯一？ ⇨ 需要$f(x, y)$满足一定的条件

② 如何求解？ $F(x, y)$一般不容易得到 ⇨ **数值解法！**

背景知识—凸集

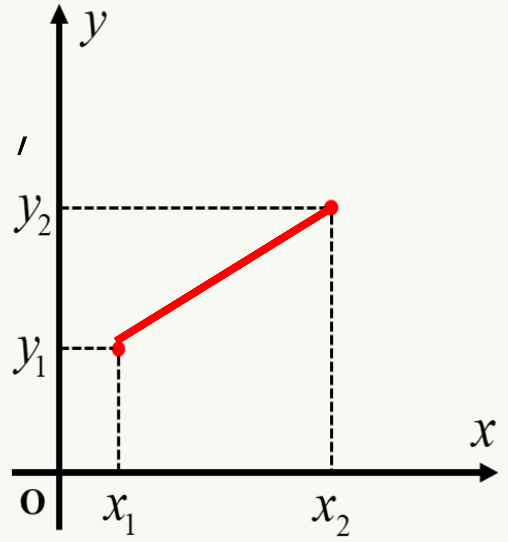
概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

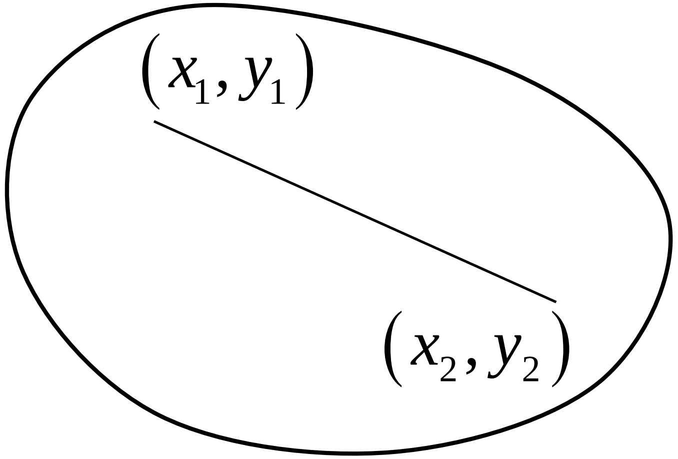
定义9.1.2（教材编号）

设集合$D \subset \mathbb{R}^2$，若对任意两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in D$，均有

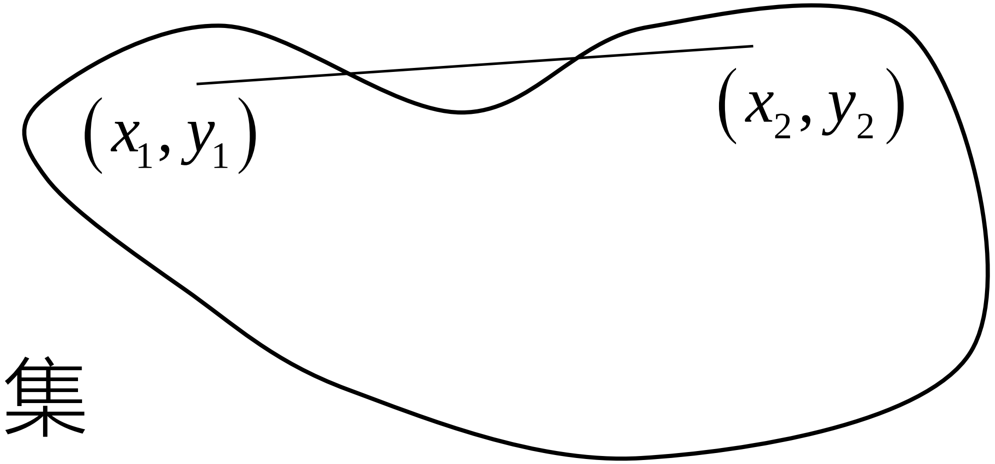
$$\left(\underline{(1-\lambda)x_1+\lambda x_2,(1-\lambda)y_1+\lambda y_2}\right)\in D$$

$\lambda \in [0,1]$则称D为一个**凸集**





凸集



非凸集

背景知识—Lipschitz条件

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

定义9.1.1（教材编号） $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|=\left|f'(\xi)(x_1-x_2)\right|\le\left|f'(\xi)\right|\left|x_1-x_2\right|$

设函数$f(x,y)$在$D\subset\mathbb{R}^2$上有定义，如果存在一个常数L，使得

$$\left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|\le L\left|y_1-y_2\right|,\forall(x,y_1),(x,y_2)\in D$$

则称$f(x,y)$关于变量y满足**Lipschitz条件**，L 称为 f 的**Lipschitz常数**

定理9.1.1（教材编号）

设函数$f(x,y)$在凸集$D\subset\mathbb{R}^2$上有定义，若存在一个常数L，使得

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le L,\forall(x,y)\in D$$

称$f(x,y)$关于变量y满足**Lipschitz条件**，L称为 f 的**Lipschitz常数**

背景知识—适定

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

定义9.1.3（教材编号）

若一阶常微分方程初值问题

①存在唯一解$y^*(x)$

②对于任意$\varepsilon > 0$，存在一个正数使得当$|\varepsilon_0| < \delta^*$，在$[x_0, b]$上$\delta(x)$连续，且$\delta(x) < \delta^*$时，初值问题$\begin{cases} z' = f(x,z) + \delta(x), x \in [x_0, b] \\ z(x_0) = y_0 + \varepsilon_0 \end{cases}$

存在唯一解$z(x)$，且满足$|z(x) - y(x)| < \varepsilon, x \in [x_0, b]$，则称初值问题是适定的

适定包含了两层意思：解唯一存在，且对扰动不敏感

$f(x,y)$在D上连续，并对变量y满足Lipschitz条件，则初值问题是适定的

$$D = \{(x,y) | x_0 \le x \le b, -\infty < y < \infty\}$$ （教材定理9.1.2）

内容提纲

概论
- 研究问题
- 背景知识

简单数值方法
- 欧拉法
- 梯形方法
- 误差分析
- 小结

R-K法
- 基本思路
- 显式R-K法
- 隐式R-K法

收敛与稳定分析
- 相容性
- 收敛性
- 绝对稳定性

线性多步法
- 多步法
- 误差分析
- Adams法
- 待定系数法
- 预估-校正

方程组与高阶
- 一阶方程组
- 高阶微分方程

编程实践

8.1 概论及背景知识

8.2 简单数值方法

8.3 Runge-Kutta法

8.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性

8.5 线性多步法

8.6 一阶方程组与高阶微分方程的初值问题

8.7 编程实践（穿插在各小结中）

Euler方法—先从几何解释出发

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0 = a) = y_0 \end{cases}$$

常微分方程的初值问题

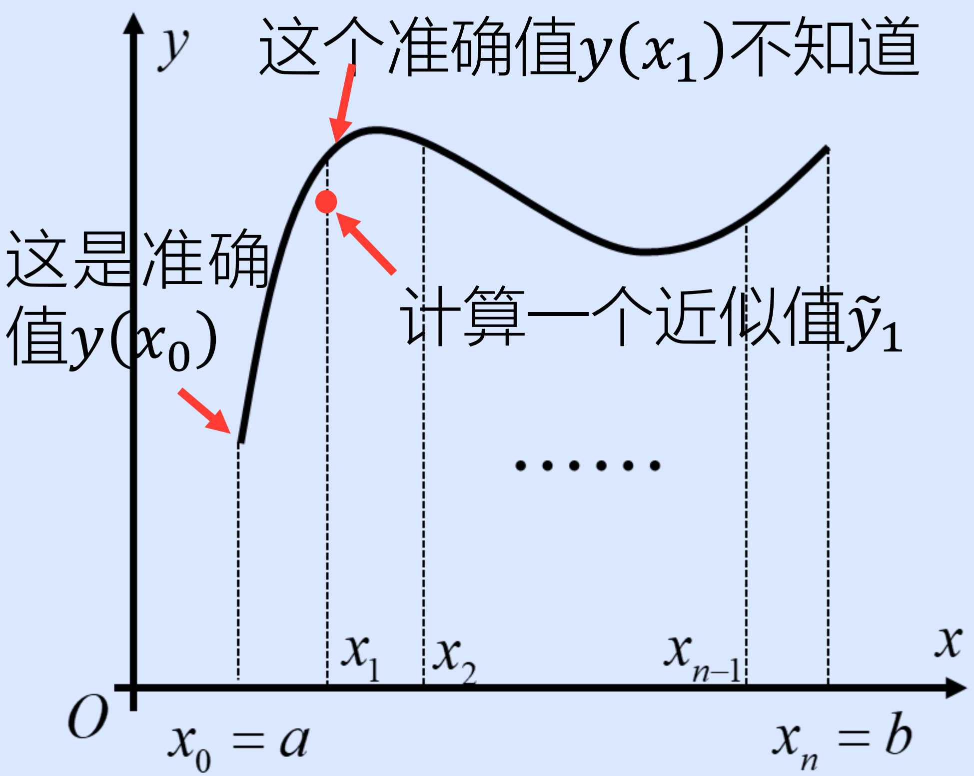
⇩

$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \varphi(h, x, \tilde{y}_k)$ 显式单步法

$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \varphi(h, x, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k+1})$ 隐式单步法

$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \varphi(h, x, \tilde{y}_k, \tilde{y}_{k-1}, \ldots)$ 多步法

微分方程 ⇨ **差分方程**



将 $[a,b]$区间分成等间距的n份，有$n+1$个节点

$$x_n = x_0 + nh, n = 0,1,\ldots,n$$

也可以不等间距 （ h 为步长）

Euler方法—显式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

①回忆简单的数值微分

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0 = a) = y_0 \end{cases}$$

$$y(\underbrace{x_0 + h}_{x_1}) = y(x_0) + y'(x_0)h + \cancel{\frac{1}{2}y''(\xi)h^2} \Rightarrow y'(x_0) \approx \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h}$$

差分方程

$$y_{k+1} - y_k \approx hf(x_k, y_k) \Rightarrow y_{k+1} \approx y_k + hf(x_k, y_k), y_0 = y(x_0), k = 1,2,\ldots,n$$

②回忆数值积分

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \Rightarrow \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k, y_k)dx \Rightarrow y_{k+1} - y_k \approx (x_{k+1} - x_k) f(x_k, y_k)$$

左边矩形公式

从数值积分和数值微分都可以得到同样的递推公式，这个称为**显式Euler方法**

Euler方法—显式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

事实上，显式Euler法是如何更新y_{k+1}的？

$$y_{k+1} \approx y_k + hf(x_k, y_k), y_0 = y(x_0), k = 1,2,\ldots,n$$

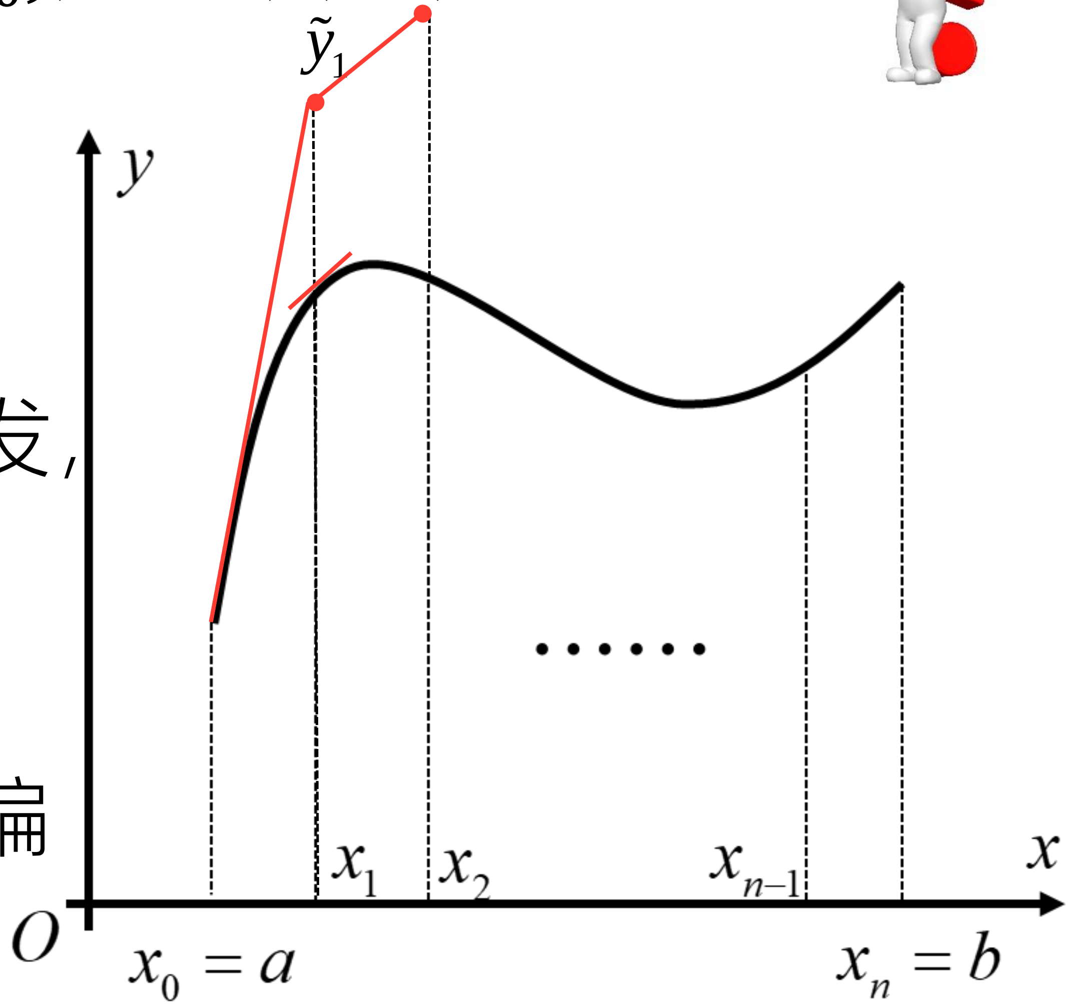
带回微分方程 $hy'(x_k) = hy'_k$

因而 $\tilde{y}_1 = y_0 + hy'_0$

下一步将在这个偏离的点出发，继续沿切线更新

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + hy'_1$$

显然这样的递推，会显著的偏离原曲线$y(x)$



Euler方法—隐式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} dy = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k, y_k)\,dx \Rightarrow y_{k+1} - y_k \approx (x_{k+1} - x_k)\, f(x_{k+1}, y_{k+1}) = hf(x_{k+1}, \boxed{y_{k+1}})$$

右矩形公式　　　　隐式方法无法直接求解

隐式Euler方法

$$y_{k+1} \approx y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$$

如何求解?

令y_k已经计算获得，构造y_{k+1}的初始值

$$y_{k+1}^{0} = y_k + hf(x_k, y_k) \qquad \text{显式Euler}$$

$$\Rightarrow \quad y_{k+1}^{(1)} = y_k + hf\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(0)}\right) \qquad y_{k+1}^{(2)} = y_k + hf\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(1)}\right)$$

$$\cdots\cdots \quad y_{k+1}^{(s)} = y_k + hf\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s-1)}\right)$$

不动点迭代!

Euler方法—隐式

以上不动点迭代的收敛性如何？

$$y_{k+1}=y_k+hf(x_{k+1},y_{k+1});\, y_{k+1}^{(s)}=y_k+hf\left(x_{k+1},y_{k+1}^{(s-1)}\right)$$

$$\left|y_{k+1}^{(s+1)}-y_{k+1}\right|=\left|y_k+hf\left(x_{k+1},y_{k+1}^{(s)}\right)-y_k-hf(x_{k+1},y_{k+1})\right|$$
$$=h\left|f\left(x_{k+1},y_{k+1}^{(s)}\right)-f(x_{k+1},y_{k+1})\right|$$

若$f(x,y)$关于变量 y 满足**Lipschitz条件**，上式

$$h\left|f\left(x_{k+1},y_{k+1}^{(s)}\right)-f\left(x_{k+1},y_{k+1}\right)\right|\le Lh\left|y_{k+1}^{(s)}-y_{k+1}\right|=Lh\left|f\left(x_{k+1},y_{k+1}^{(s-1)}\right)-f\left(x_{k+1},y_{k+1}\right)\right|$$
$$\le\left(Lh\right)^2\left|y_{k+1}^{(s-1)}-y_{k+1}\right|\le\ldots\le\left(Lh\right)^{n+1}\left|y_{k+1}^{(0)}-y_{k+1}\right|$$

因而$\boldsymbol{Lh<1}$为该迭代的**收敛条件**

Euler方法—隐式

隐式Euler法是如何更新y_{k+1}的？

$$y_{k+1} \approx y_k + \underline{hf(x_{k+1}, y_{k+1})}$$

带回微分方程

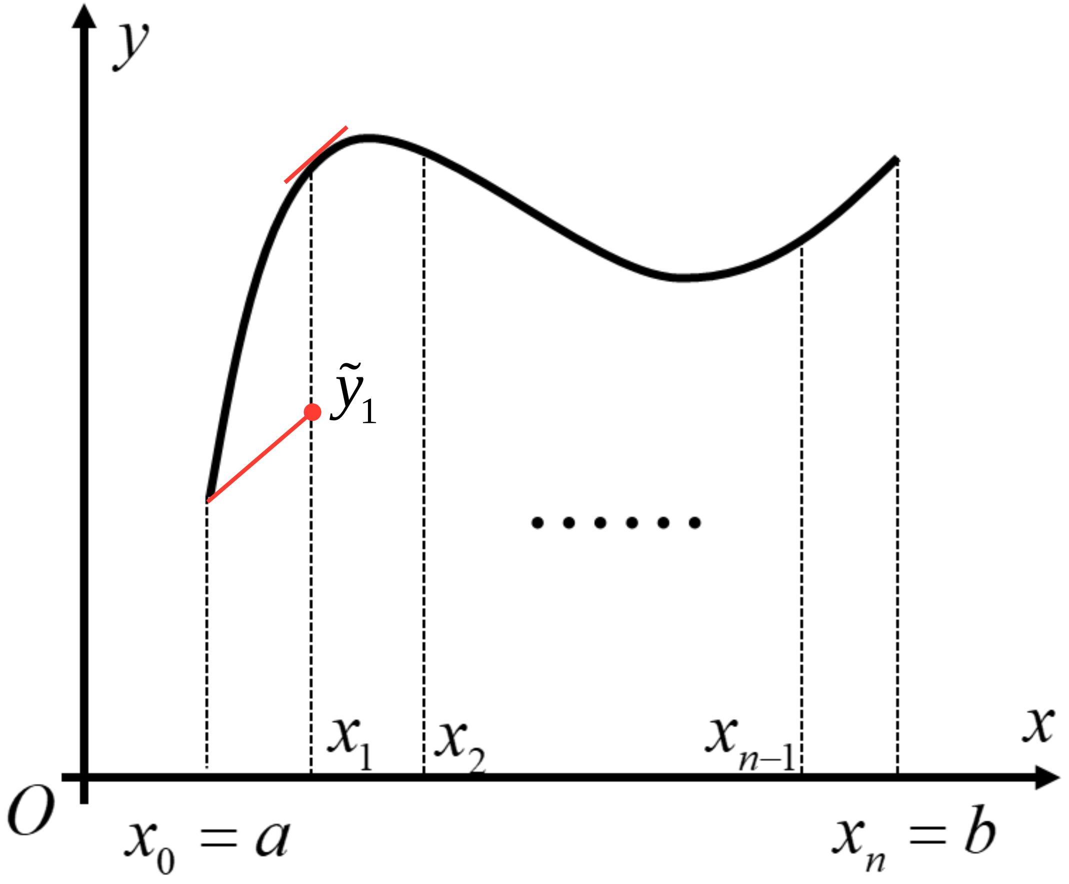
$$hy'(x_{k+1}) = hy'_{k+1}$$

因而$\tilde{y}_1 = y_0 + hy'_1$

下一步将在这个偏离的点出发，继续沿切线更新

$$\tilde{y}_2 = \tilde{y}_1 + hy'_2$$

从误差的角度隐式Euler法并没有比显式Euler法好



梯形方法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

显式和隐式Euler法：

从数值积分的角度采用了较差的左矩形或者右矩形公式；

从数值微分的角度，用了最简单的一阶差分公式

显然，可以采用更好的数值积分公式，比如梯形公式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \Rightarrow \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy=\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k,y_k)dx \Rightarrow y_{k+1}-y_k \approx \frac{h}{2}\left[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})\right]$$

$$\begin{cases} y_{k+1}=y_k+\dfrac{h}{2}\left[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})\right] \\ y_0=y(x_0) \end{cases}$$

梯形方法

显然这也是一种单步隐式格式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

按照隐式Euler方法同样构造迭代法求解

$$\begin{cases} y_{k+1}^{0} = y_k + hf\left(x_k, y_k\right) & \text{显式Euler} \\ y_{k+1}^{(s)} = y_k + \dfrac{h}{2}\left[f\left(x_k, y_k\right) + f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s-1)}\right)\right] & \text{不动点迭代} \end{cases}$$

$$\left|y_{k+1}^{(s+1)} - y_{k+1}\right| = \frac{h}{2}\left|f\left(x_{k+1}, y_{k+1}^{(s)}\right) - f(x_{k+1}, y_{k+1})\right| \le \frac{hL}{2}\left|y_{k+1}^{(s)} - y_{k+1}\right|$$

$$\le \left(\frac{Lh}{2}\right)^2 \left|y_{k+1}^{(s-1)} - y_{k+1}\right|$$

$$\le \cdots$$

$$\le \left(\frac{Lh}{2}\right)^{n+1} \left|y_{k+1}^{(0)} - y_{k+1}\right|$$

故梯形方法的**收敛条件**为

$$\frac{hL}{2} < 1$$

梯形方法—预估-校准

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

隐式方法比显式方法有更好的**数值稳定性**，但不动点迭代增加了**计算量……**

能否有保持显式的计算格式，又有一定的精度提升？

①显式Euler $\bar{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$ **预估**

②一步梯形公式 $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})\right]$ **校准**

以上可以合并成一个求解公式

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, \underline{y_k}) + f(x_{k+1}, \underline{y_k} + hf(x_k, \underline{y_k}))\right]$$ 也称**改进Euler法**

这是一个**单步显式**公式，其实就是梯形方法中的迭代只算第一步的一个简化版本

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

回到显式单步法的一般表达形式

$$\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + \varphi(h, x, \tilde{y}_k) = \tilde{y}_k + h\varphi(x, \tilde{y}_k; h)$$

其中$\varphi(x, \tilde{y}_k; h)$和$f(x, y)$有关，称为**增量函数**

在显式计算的每一步，定义误差$e_k = y(x_k) - \tilde{y}_k$，通过计算过程可知，之前每步的截断误差（**暂不考虑舍入误差**）都会影响到本步，因而称**整体截断误差**

定义9.2.1（教材编号）

设$y(x)$是上述初值问题的精确解，则

$$T_{k+1}(x) = y(x_{k+1}) - \boxed{y(x_k) - h\varphi(x_k, y(x_k); h)}$$

不一样

称为显式单步法的**局部截断误差**

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

考虑显式Euler方法：$\varphi(x,y_k;h)=hf(x_k,y_k)$

假定第k步得到了准确解

$$T_{k+1}(x)=y(x_{k+1})-\Big[y(x_k)+\underbrace{hf\big(x_k,y(x_k)\big)}_{y'(x_k)}\Big]$$

带回微分方程

所以：$T_{k+1}(x)=\boxed{y(x_{k+1})-y(x_k)}-\cancel{hy'(x_k)}$

$$\cancel{hy'(x_k)}+\frac{h^2}{2}y''(\xi_k)$$

$$T_{k+1}(x)=\frac{h^2}{2}y''(\xi_k)$$

若$y(x)$在$x_0=[a,b]$上二阶连续可导，$|T_{k+1}(x)|\le\frac{1}{2}M_2h^2$

其中，$M_2=\max\limits_{x_0\le x\le b}|y''(x)|$

误差分析—Euler方法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

接着讨论显式Euler方法的整体截断误差$e_k = y(x_k) - \tilde{y}_k$

$$e_{k+1} = y(x_{k+1}) - \tilde{y}_{k+1} = y(x_{k+1}) - \left[y(x_k) + hf\left(x_k, y(x_k)\right)\right] - \left\{\tilde{y}_{k+1} - \left[y(x_k) + hf\left(x_k, y(x_k)\right)\right]\right\}$$

$$= T_{k+1} - \left\{\tilde{y}_k + hf\left(x_k, \tilde{y}_k\right) - \left[y(x_k) + hf\left(x_k, y(x_k)\right)\right]\right\}$$

$$= T_{k+1} + \left(y(x_k) - \tilde{y}_k\right) + h\left[f\left(x_k, y(x_k)\right) - f\left(x_k, \tilde{y}_k\right)\right]$$

$$\left|f\left(x_k, y(x_k)\right) - f\left(x_k, \tilde{y}_k\right)\right| \le L\left|y(x_k) - \tilde{y}_k\right| \quad 且 \quad \left|T_{k+1}(x)\right| \le \frac{1}{2}M_2h^2$$

$$\left|e_{k+1}\right| \le \left|T_{k+1}\right| + \left|e_k\right| + hL\left|e_k\right| \le (1 + hL)\left|e_k\right| + \frac{1}{2}M_2h^2$$

误差分析—Euler方法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$|e_{k+1}| \le (1+hL)|e_k| + \frac{1}{2}M_2h^2 \Rightarrow |e_k| \le (1+hL)|e_{k-1}| + \frac{1}{2}M_2h^2$$

$$\Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow |e_1| \le (1+hL)|e_0| + \frac{1}{2}M_2h^2$$

$$\Rightarrow |e_{k+1}| \le (1+hL)\left[(1+hL)|e_{k-1}| + \frac{1}{2}M_2h^2\right] + \frac{1}{2}M_2h^2$$

$$= (1+hL)^2|e_{k-1}| + (1+hL)\frac{1}{2}M_2h^2 + \frac{1}{2}M_2h^2$$

$$\frac{1-(1+hL)^{k+1}}{1-(1+hL)} = \frac{(1+hL)^{k+1}-1}{hL}$$

$$\Rightarrow \cdots\cdots \Rightarrow |e_{k+1}| \le \cancel{(1+hL)^{k+1}|e_0|} + \frac{1}{2}M_2h^2 \boxed{\sum_{j=0}^{k}(1+hL)^j} \quad k = 0,1,\ldots,n$$

$$\boxed{e_0 = y_0 - y(x_0) = 0}$$

$$|e_{k+1}| \le \frac{1}{2}M_2h^2 \frac{(1+hL)^{k+1}-1}{hL} = \frac{M_2h}{2L}\left[(1+hL)^{k+1}-1\right]$$

h为Euler方法使用的步长，故：
$(n+1)h \le b - x_0$，即$h \le \frac{b-x_0}{n+1}$

$$|e_{n+1}| \le \frac{M_2h}{2L}\left[(1+hL)^{n+1}-1\right] = \frac{M_2h}{2L}\left[\left(1+\frac{b-a}{n+1}L\right)^{n+1}-1\right]$$

误差分析—Euler方法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$\left|e_{n+1}\right| \le \frac{M_2 h}{2L}\left[(1+hL)^{n+1}-1\right]=\frac{M_2 h}{2L}\left[\boxed{\left(1+\frac{b-a}{n+1}L\right)^{n+1}}-1\right] \to e^{L(b-a)} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

$$\left|e_{n+1}\right| \le \frac{M_2 h}{2L}\left[e^{L(b-a)}-1\right]=O(h)$$ 对比 $|T_{k+1}(x)| \le \frac{1}{2}M_2h^2$

由此可见， T_{n+1}比e_{n+1}要高一阶

定义9.2.2（教材编号）

设$y(x)$是上述初值问题的精确解，对显式单步法，若p是满足

$$T_{n+1}(x)=y(x+h)-y(x)-h\varphi\big(x,y(x);h\big)=O\left(h^{p+1}\right)$$

则称单步法具有**p阶精度**，或者称单步法是**p阶方法**

误差分析—Euler方法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

定义9.2.3（教材编号）

若单步法是p阶方法，将其局部误差写成

$$T_{n+1}(x)=\varphi\left(x_n,y\left(x_n\right)\right)h^{p+1}+\mathrm{O}\left(h^{p+2}\right)$$

则称$\varphi(x_n,y(x_n))h^{p+1}$为**主局部截断误差**

或**局部截断误差的主项**

显式Euler方法：$T_{n+1}(x)=\frac{h^2}{2}y''+\mathrm{O}(h^3)$是**1阶方法**

隐式Euler方法：可以类似推出，也是**1阶方法**

梯形方法：$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$

误差分析—梯形法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-\frac{h}{2}\left[f\left(x_n,y(x_n)\right)+f\left(x_{n+1},y(x_{n+1})\right)\right]$$

$$=\boxed{y(x_{n+1})}-\cancel{y(x_n)}-\frac{h}{2}\left[\cancel{y'(x_n)}+\boxed{y'(x_{n+1})}\right]$$

$$y'(x_{n+1})=\cancel{y'(x_n)}+\cancel{hy''(x_n)}+\frac{1}{2}h^2y'''(x_n)+O(h^3)$$

$$y(x_{n+1})=\cancel{y(x_n)}+\cancel{hy'(x_n)}+\cancel{\frac{1}{2}h^2y''(x_n)}+\frac{1}{6}h^3y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$T_{n+1}=-\frac{1}{12}h^3y'''+O(h^4)$$ 梯形法是**2阶**方法!

各阶导数是我们推导需要的主要工具!

误差分析—2个偏微分工具

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

工具1

$$y' = f(x,y)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\boxed{f(x,y)}$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

工具2

$$f(x+\boxed{h}, y+\boxed{k}) = f(x,y) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y) + \ldots \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) + \ldots$$

误差分析—改进Euler法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

①显式Euler $\bar{y}_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$

②一步梯形公式 $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1}) \right]$

合并 $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k)\right) \right]$

同样建立第n+1步时的局部截断误差

$$T_{n+1} = \boxed{y(x_{n+1})} - \left[y(x_n) + \frac{h}{2}\boxed{f(x_n, y(x_n))} + \frac{h}{2}\boxed{f\left(x_n + h, y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))\right)} \right]$$

Taylor展开 $y'(x_n)$ 同样Taylor展开

误差分析—改进Euler法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-\left[y(x_n)+\frac{h}{2}y'(x_n)+\frac{h}{2}\boxed{f\left(x_n+h,y(x_n)+hf\left(x_n,y(x_n)\right)\right)}\right]$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+O(h^4)$$

$k \doteq hf$ y'

$$f\left(x_n+h,y(x_n)+\boxed{hf\left(x_n,y(x_n)\right)}\right)=\boxed{f}+\boxed{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+hf\frac{\partial}{\partial y}\right)f}+\frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+hf\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f+O(h^3)$$

工具2

$$\boxed{h\left[\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right]}$$

y'' 工具1

$$f\left(x_n+h,y(x_n)+hf\left(x_n,y(x_n)\right)\right)=y'+hy''+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f+O(h^3)$$

误差分析—改进Euler法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$T_{n+1}=\cancel{y(x_n)}+\cancel{hy'(x_n)}+\cancel{\frac{h^2}{2}y''(x_n)}+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+O(h^4)$$

$$-\left[\cancel{y(x_n)}+\cancel{\frac{h}{2}y'(x_n)}+\frac{h}{2}\left(\cancel{y'}+\cancel{hy''}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f+O(h^3)\right)\right]$$

$$T_{n+1}=\frac{h^3}{6}y'''-\frac{h^3}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}+f\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f+O(h^4)=\boxed{\frac{h^3}{12}\left[2y'''-3\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2f\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)\right]}+O(h^4)$$

局部截断误差的主项

回忆一下梯形方法：$T_{n+1}=-\frac{h^3}{12}y'''+O(h^4)$

因而**改进Euler法**也是**二阶**的！

小结

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

① $$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hy'(x_n) = y(x_n) + hf(x_n, y_n)$$

显式Euler方法，1阶

② $$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hy'(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

隐式Euler方法，1阶

③ $$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]$$

梯形方法，2阶

④ $$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)\right)\right]$$

改进Euler方法，2阶

内容提纲

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

8.1 概论及背景知识

8.2 简单数值方法

8.3 Runge-Kutta法

8.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性

8.5 线性多步法

8.6 一阶方程组与高阶微分方程的初值问题

8.7 编程实践（穿插在各小结中）

基本思路—首先考虑构造Taylor展开

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

能否继续构造高阶分方法?

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)+\ldots$$

① $y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hy'(x_n)=y(x_n)+hf(x_n,y_n)$ Euler方法，1阶

改进Euler方法，2阶

② $y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)=y(x_n)+hf+\frac{h^2}{2}\boxed{\left[\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right]}$ 2阶导数的表示

③ $y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)$

3阶

$$=y(x_n)+hf+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}+f\frac{\partial f}{\partial y}\right]+\frac{h^3}{6}\boxed{\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2f\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]}$$

再往下推，导数越来越难表达，而且需要计算大量的偏导数!

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

基本思路：用 f 若干节点上函数值的线性组合来代替 f 的导数

再看改进Euler法

$$y(x_{k+1}) \approx y(x_k) + hf + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

有偏导数

$$y_{k+1} \approx y_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f\left(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k)\right)\right]$$

没有偏导数，只有 f 两个节点上的值

$$f\left(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k)\right) \approx f(x_k, y_k) + \left[h\frac{\partial f}{\partial x} + hf\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

工具2，二元函数的Taylor展开

基本思路

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

一般表达形式

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{r=1}^{R} C_r K_r$$

C_r为待定的权因子， R为使用 f 值的个数

$$K_r = f\left(x_n + a_r h, y_n + h\sum_{s=1}^{r-1} b_{rs} K_s\right), r = 1,2,\ldots,R; a_1 = 0$$

K 可以递推得到

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f(x_n + a_2 h, y_n + h b_{21} K_1)$$

$$K_3 = f(x_n + a_3 h, y_n + h b_{31} K_1 + h b_{32} K_2)$$

……

关键在于确定 C_r, a_r, b_{rs} 这些参数！

如果取R=1

$$y_{n+1} \approx y_n + hC_1 K_1 = y_n + \boxed{hC_1 f(x_n, y_n)}$$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \boxed{hy'(x_n)} + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \ldots$$

$C_1 = 1$ 就是Euler法！

是不是很简单？

显式R-K法—R=2

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

如果取R=2 $y_{n+1}=y_n+hC_1K_1+hC_2K_2$

$$K_1=f(x_n,y_n)$$

$$K_2=f(x_n+a_2h,y_n+hb_{21}K_1)$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+h\underbrace{y'(x_n)}_{f}+\frac{h^2}{2}\underbrace{y''(x_n)}_{\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}f}+O(h^3)$$

考虑K_2的Taylor展开

$$K_2=f(x_n,y_n)+\left[a_2h\frac{\partial}{\partial x}+hb_{21}K_1\frac{\partial}{\partial y}\right]f+O(h^2)$$

$$y_{n+1}=y_n+hC_1f+hC_2\left[f+a_2h\frac{\partial f}{\partial x}+hb_{21}f\frac{\partial f}{\partial y}+O(h^2)\right]$$

$$=y_n+h(C_1+C_2)f+h^2C_2a_2\frac{\partial f}{\partial x}+h^2C_2b_{21}f\frac{\partial f}{\partial y}+O(h^3)$$

$$\begin{cases}C_1+C_2=1\\ C_2a_2=\frac{1}{2}\\ C_2b_{21}=\frac{1}{2}\end{cases}$$

不够！

显式R-K法—R=2

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

指定a_2为自由参数 ⇒

$$\begin{cases} C_1 = 1 - \dfrac{1}{2a_2} \\ C_2 = \dfrac{1}{2a_2} \\ b_{21} = a_2 = \dfrac{1}{2C_2} \end{cases}$$

① $a_2 = \frac{1}{2}$ $\quad y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf\right)$ 中点公式

② $a_2 = 1$ $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf)\right]$ 改进Euler法

③ $a_2 = \frac{2}{3}$ $\quad y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}hf + \frac{3}{4}hf\left(x_n + \frac{2}{3}h, y + \frac{2}{3}hf\right)$ Heun方法

显式R-K法—R=3

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

如果取R=3 $y_{n+1}=y_n+hC_1K_1+hC_2K_2+hC_3K_3$

$$K_3=f\left(x_n+a_3h,y_n+hb_{31}K_1+hb_{32}K_2\right)$$

$$\begin{cases} C_1+C_2+C_3=1 \\ a_2=b_{21} \\ a_3=b_{31}+b_{32} \\ C_2a_2+C_3a_3=\dfrac{1}{2} \\ C_2a_2^2+C_3a_3^2=\dfrac{1}{3} \\ C_3a_2b_{32}=\dfrac{1}{6} \end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{6}h\left(K_1+4K_2+K_3\right) \\ K_1=f\left(x_n,y_n\right) \\ K_2=f\left(x_n+\dfrac{1}{2}h,y_n+\dfrac{1}{2}hK_1\right) \\ K_3=f\left(x_n+h,y_n-hK_1+2hK_2\right) \end{cases}$$

6个方程8个参数，一共有两个自由参数需要指定

一个常用的3阶R-K公式

显式R-K法—*R*=4（经典R-K方法）

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

如果取*R*=4 $y_{n+1}=y_n+hC_1K_1+hC_2K_2+hC_3K_3+hC_4K_4$

一共有13个未知数，11个方程，同样需要指定2个自由参数，推导非常复杂

$$
\begin{cases}
y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{6}h\left(K_1+2K_2+2K_3+K_4\right)\\
K_1=f\left(x_n,y_n\right)\\
K_2=f\left(x_n+\dfrac{1}{2}h,y_n+\dfrac{1}{2}hK_1\right)\\
K_3=f\left(x_n+\dfrac{1}{2}h,y_n+\dfrac{1}{2}hK_2\right)\\
K_4=f\left(x_n+h,y_n+hK_3\right)
\end{cases}
$$

4级4阶

经典Runge-Kutta方法

隐式Runge-Kutta法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

在上述的计算中

实际上K_r可以有其他组织方法

① $$K_r = f\left(x_n + a_r h, y_n + h\sum_{s=1}^{R} b_{rs} K_s\right), r = 1,2,\ldots,R; a_1 = 0$$

R级隐式Runge-Kutta方法

② $$K_r = f\left(x_n + a_r h, y_n + h\sum_{s=1}^{r} b_{rs} K_s\right), r = 1,2,\ldots,R; a_1 = 0$$

对角隐式Runge-Kutta方法

隐式Runge-Kutta法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

1级2阶隐式R-K方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hK_1 \\ K_1 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \end{cases}$$

⇨

$$hK_1 = y_{n+1} - y_n$$

⇨

$$y_n + \frac{h}{2}K_1 = y_n + \frac{1}{2}(y_{n+1} - y_n)$$
$$= \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})$$

⇨

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})\right)$$

2级4阶隐式R-K方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \frac{1}{4}hK_1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hK_2\right) \\ K_2 = f\left(x_n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, y_n + \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)hK_1 + \frac{1}{4}hK_2\right) \end{cases}$$

实用2级3阶隐式对角R-K方法

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2) \\ K_1 = f(x_n + rh, y_n + rhK_1) \\ K_2 = f(x_n + (1-r)h, y_n + h(1-2r)K_1 + rhK_2) \end{cases} \qquad r = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

内容提纲

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

8.1 概论及背景知识
8.2 简单数值方法
8.3 Runge-Kutta法
8.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性
8.5 线性多步法
8.6 一阶方程组与高阶微分方程的初值问题
8.7 编程实践（穿插在各小结中）

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ 单步方法（EulerMethod类）

```
public static Tuple<Vector, Vector> OneStep(double x0, double y0, double xn, double h,
    BinaryFunction core)
{
    int n = (int)((xn - x0) / h) + 1;
    Vector xs = new Vector(n), ys = new Vector(n);

    xs[0] = x0;
    ys[0] = y0;

    for (int i = 1; i < n; i++)
    {
        xs[i] = xs[i - 1] + h;
        ys[i] = core(xs[i - 1], ys[i - 1]);
    }

    return new Tuple<Vector, Vector>(xs, ys);
}
```

用来计算$y_i = \text{core}(x_{i-1}, y_{i-1})$，core中隐含了步长h

待求的n个节点

赋予初始值

从前往后递推x_i和y_i

$$y_i = y_{i-1} + h\phi(x_{i-1}, y_{i-1}; h)$$
$$= g(x_{i-1}, y_{i-1}; h)$$

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ 显式/隐式Euler方法（EulerMethod类）

显式Euler法

```
public static Tuple<Vector, Vector> Explicit(BinaryFunction f, double x0, double y0,
    double xn, double h)
{
    BinaryFunction core = (x, y) => y + f(x, y) * h;
    return OneStep(x0, y0, xn, h, core);
}
```

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

隐式Euler法

```
public static Tuple<Vector, Vector> Implicit(BinaryFunction f, double x0, double y0,
    double xn, double h)
{
    BinaryFunction core = (x, y) =>
    {
        double yInit = y + f(x, y) * h, x1 = x + h;
        return FixedPoint.Steffensen(y1 => y + h * f(x1, y1), yInit);
    };
    return OneStep(x0, y0, xn, h, core);
}
```

显式Euler法给出迭代初值

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_i, y_i)$$

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ 改进Euler方法与梯形方法（EulerMethod类）

梯形方法

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_i, y_i)]$$

```
public static Tuple<Vector, Vector> Trapezoid(BinaryFunction f, double x0, double y0,
    double xn, double h)
{
    BinaryFunction core = (x, y) =>
    {
        double k0 = f(x, y), x1 = x + h, yInit = y + k0 * h;
        return FixedPoint.Steffensen(y1 => y + h / 2 * (k0 + f(x1, y1)), yInit);
    };
    return OneStep(x0, y0, xn, h, core);
}
public static Tuple<Vector, Vector> Improve(BinaryFunction f, double x0, double y0,
    double xn, double h)
{
    BinaryFunction core = (x, y) =>
    {
        double k0 = f(x, y), yInit = y + k0 * h;
        return y + h / 2 * (k0 + f(x + h, yInit));
    };
    return OneStep(x0, y0, xn, h, core);
}
```

改进Euler法

预估

校正

清華大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第八章

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ Runge-Kutta方法（RungeKutta类）

```
public static Tuple<Vector, Vector> Explicit(BinaryFunction f, double x0, double y0,
    double xn, double h, int R = 1)
{
    BinaryFunction core;

    double half = h / 2;
    if (R == 1)
        core = (x, y) => y + h * f(x, y);
    else if (R == 2)
        core = (x, y) => y + h * f(x + half, y + half * f(x, y));

    // ……

    else
        throw new Exception();

    return EulerMethod.OneStep(x0, y0, xn, h, core);
}
```

显式Runge-Kutta方法

$$K_1 = f(x_i, y_i)$$

$$K_2 = f(x_i + a_2 h, y_i + h b_{21} K_1)$$

$$K_3 = f(x_i + a_3 h, y_n + h b_{31} K_1 + h b_{32} K_2)$$

……

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{r=1}^{R} c_r K_r$$

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ Runge-Kutta方法（RungeKutta类）

对角隐式Runge-Kutta方法

$$K_1 = f(x_i + a_1 h, y_i + hb_{11}K_1)$$

$$K_2 = f(x_i + a_2 h, y_i + hb_{21}K_1 + hb_{22}K_2)$$

$$K_3 = f(x_i + a_3 h, y_n + hb_{31}K_1 + hb_{32}K_2 + hb_{33}K_3)$$

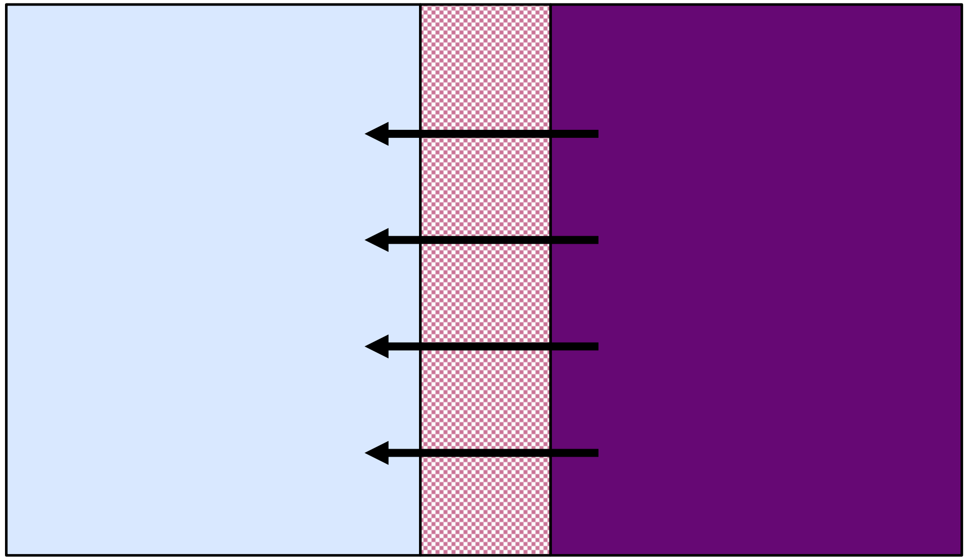
$$\cdots\cdots$$

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{r=1}^{R} c_r K_r$$

```
public static Tuple<Vector, Vector> Implicit(BinaryFunction f, double x0, double y0,
    double xn, double h, int R = 1)
{

    BinaryFunction core;

    if (R == 1)
        core = (x, y) =>
        {
            double K1 = FixedPoint.Steffensen(z => f(x + h / 2, y + h / 2 * z), f(x, y));
            return y + h * K1;
        };

    // ......

    else
        throw new Exception();

    return EulerMethod.OneStep(x0, y0, xn, h, core);
}
```

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ 物质扩散问题



左右容器内溶质始终保持均匀分布

若右侧容器的物质浓度保持不变为c_a
左侧容器的物质浓度$c(t)$满足

$$\frac{dc}{dt} = k(c_a - c)$$

$$c(t) = e^{-kt}(c_0 - c_a) + c_a$$

若右侧容器的物质浓度随时间变化为$c_x(t)$
左侧容器的物质浓度$c(t)$满足

$$\frac{dc}{dt} = k(c_x - c)$$

不妨设某情况下$k = 1$、$c_x(t) = 1 + t$、$c_0 = 1$，有

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = -c + t + 1 \\ c(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}} \longrightarrow y(x) = e^{-x} + x$$

教材P280
例9.2.1

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ 物质扩散问题（EulerMethod.Sample）

```
public static void Sample()
{
    BinaryFunction f = (x, y) => 1 + x - y;
    double x0 = 0, y0 = 1, xn = 2, h = 1;
    UnaryFunction fAcc = x => x + Math.Exp(-x);

    {
        // 显式欧拉法
        var xy = EulerMethod.Explicit(f, x0, y0, xn, h);
        Vector xs = xy.Item1;
        Vector ys = xy.Item2;
        Console.WriteLine("显式欧拉法");
        Console.WriteLine("x: " + xs);
        Console.WriteLine("y: " + ys);
        Console.WriteLine("误差: " + (ys - xs.Mapping(fAcc)));
        Console.WriteLine("最大误差: " + Norm.Infinity(ys - xs.Mapping(fAcc)));
    }
}
```

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x - y$$

$y(0) = 1$，计算到2，步长取1

$$y = e^{-x} + x$$

调用显式欧拉法求解

计算误差向量及其无穷范数

学习重点

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

- 理解**微分方程、常微分方程（及其初值问题）**的概念
- 掌握**简单数值方法**的思路、求解方法和误差分析方法
- 理解**R-K方法**的思路
- 掌握**经典R-K方法**的计算过程

作业

教材P326-1、4、7、8

内容提纲

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

8.1 概论及背景知识
8.2 简单数值方法
8.3 Runge-Kutta法
8.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性
8.5 线性多步法
8.6 一阶方程组与高阶微分方程的初值问题
8.7 编程实践（穿插在各小结中）

相容性

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

对于微分方程的初值问题：$\begin{cases} y' = f(x,y), x_0 < x \le b \\ y(x_0) = a \end{cases}$

显式单步法：$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n; h) \\ y(x_0) = a \end{cases}$

若：$\dfrac{\boxed{y(x+h) - y(x)}}{h} = \varphi(x, y(x); h) + O(h^p)$ **p阶方法**

$$\Rightarrow \varphi(x, y(x); h) = \frac{1}{h}\boxed{\int_x^{x+h} y'(\tau)d\tau} + O(h^p)$$

根据积分中值定理

$$\varphi(x, y(x); h) = y'(\eta) + O(h^p) = f(\eta, y(\eta)) + O(h^p) \quad \eta \in (x, x+h)$$

可得：$\lim\limits_{h\to 0} \varphi(x, y(x); h) = f(x, y(x))$

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

定义9.4.1（教材编号）

如果前述显式单步法中增量函数$\varphi(x, y(x); h)$于$h=0$连续，且

$$\varphi(x, y; 0) = f(x, y)$$

则称显式单步法与微分方程是**相容**的

定理9.4.1（教材编号）

显式单步法相容的**充分必要条件**为显式单步法的局部截断误差为

$$O\left(h^{p+1}\right), p \geq 1$$

即p阶方法，整体截断误差$O(h^p), p \geq 1$

由此可见：Euler法和改进Euler法都相容

相容是对**方法**而言的

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

定义9.4.2（教材编号）

对于初值问题，$f(x,y)$对y满足Lipschitz条件，如果由显式单步法得到的解y_n，对任意$x = x_0 + nh$，有

$$\lim_{h\to 0,\, x=x_0+nh} y_n = y(x)$$

那么称显式单步法是**收敛的**

比如，讨论用显式Euler方法计算该方程的收敛性 $\begin{cases} y' = -y \\ y(0) = 1 \end{cases}, 0 \le x \le b$

设 $x = nh \in [0,b]$ ⇨ $y_n = y_{n-1} + h(-y_{n-1}) = (1-h)y_{n-1} = \ldots = (1-h)^n y_0 = (1-h)^n$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x=x_0+nh}} y_n = \lim_{h\to 0}(1-h)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$$ 收敛！

收敛除了**方法**之外，还要讨论**具体的方程**

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

定理9.4.2（教材编号）

相容　　不是f

对于初值问题，如果显式单步法$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n; h)$的局部截断误差为$\boxed{O(h^{p+1}), p \geq 1}$，且增量函数$\boxed{\varphi}$关于$y$满足Lipschitz条件，则**显式单步法收敛**！

定理9.4.3（教材编号）

设增量函数φ关于y满足Lipschitz条件，则显式单步法收敛的**充分必要条件**为单步法是相容的

用一般性的方法来判断收敛，而不需要每一个函数都讨论

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

定理的证明方式和推导单步法的整体截断误差类似

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \boxed{y(x_n) - h\varphi} = O\left(h^{p+1}\right)$$

定理条件p阶方法

$$\tilde{y}_{n-1} + h\varphi(x_{n-1}, \tilde{y}_{n-1})$$

e_{n-1}

$\le L|e_{n-1}|$

$$e_n = y(x_n) - \tilde{y}_n$$

$$= \underbrace{\boxed{y(x_n) - \left[y(x_{n-1}) + h\varphi\left(x_{n-1}, y(x_{n-1})\right)\right]}}_{T_n} + \left[y(x_{n-1}) + h\varphi\left(x_{n-1}, y(x_{n-1})\right)\right] - \tilde{y}_n$$

$$|e_n| \le |T_n| + |e_{n-1}| + hL|e_{n-1}| = Ch^{p+1} + (1+hL)|e_{n-1}|$$

$$\le Ch^{p+1} + (1+hL)\left[Ch^{p+1} + (1+hL)|e_{n-2}|\right]$$

$$= Ch^{p+1} + (1+hL)Ch^{p+1} + (1+hL)^2|e_{n-2}| \le \ldots = Ch^{p+1}\sum_{i=0}^{n-1}(1+hL)^i + \cancel{(1+hL)^n|e_0|}$$

$$|e_n| \le Ch^{p+1}\frac{(1+hL)^n - 1}{hL} = \frac{C}{L}h^p\left(e^{nhL} - 1\right) = \frac{C}{L}h^p\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right) \Rightarrow \lim_{h\to 0} y_n = y(x_n)$$

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

对于一般R-K方法：

$$T_{n+1} = Ch^{p+1}$$

$$\varphi(x,y;h) = C_1K_1 + C_2K_2 + \ldots + C_RK_R \qquad \varphi(x,\bar{y};h) = C_1\bar{K}_1 + C_2\bar{K}_2 + \ldots + C_R\bar{K}_R$$

$$\left|K_1 - \bar{K}_1\right| = \left|f(x,y) - f(x,\bar{y})\right| \le L\left|y - \bar{y}\right|$$

$$\le L\left(1 + hLb_{21}\right)\left|y - \bar{y}\right|$$

$$\left|K_2 - \bar{K}_2\right| = \left|f\left(x + a_2h, y + hb_{21}K_1\right) - f\left(x + a_2h, \bar{y} + hb_{21}\bar{K}_1\right)\right| \le \boxed{L\left|y - \bar{y}\right| + hLb_{21}\left|K_1 - \bar{K}_1\right|}$$

$$\left|K_3 - \bar{K}_3\right| \le L\left(1 + hb_{31}L + 2Lhb_{32}\right)\left|y - \bar{y}\right| \qquad \ldots\ldots$$

$$\left|\varphi(x,y;h) - \varphi(x,\bar{y};h)\right| \le \sum_{r=1}^{R} C_r\left|K_r - \bar{K}_r\right|$$

清华大学深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第八章

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

刚才讨论的相容性和收敛性都没有考虑舍入误差，稳定性则是研究**舍入误差传播**的问题

三个值 $y(x_n)$ y_n $\tilde{y}_n$ 代表当前步计算得到存在舍入误差的值

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n; h); \tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_n + h\varphi(x_n, \tilde{y}_n; h)$$

$$\Rightarrow \tilde{y}_{n+1} - y_{n+1} = \tilde{y}_n + h\varphi(x_n, \tilde{y}_n; h) - [y_n + h\varphi(x_n, y_n; h)]$$
$$= \tilde{y}_n - y_n + h\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_n, \xi; h)(\tilde{y}_n - y_n)$$

若要舍入误差不增长，则

$$\frac{|\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}|}{|\tilde{y}_n - y_n|} = \left|1 + h\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_n, \xi; h)\right| \le 1$$

回忆 $\frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y}$

$$1 + h\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 1 + h + h\frac{2x}{y^2}$$

在x正方向上无法小于1

绝对稳定性—试验方程

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$\frac{|\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}|}{|\tilde{y}_n-y_n|}=\left|1+h\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_n,\xi;h)\right|\le 1$$

稳定性讨论，要考虑增量函数φ，即同时包含了方法和f，可以简化通过“试验方程”来单独讨论方法本身的稳定性

试验方程： $y'=\lambda y, \lambda\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda)<0$

①有稳定的解析解：$y=ce^{\lambda x}$　　②数值解讨论简单

③其他方程可以局部线性化成该方程，如果一个方法连这个方程都不稳定，那么对更加复杂的方程也难以稳定

绝对稳定性—显式Euler法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$y' = \lambda y$ 先考虑最简单的显式Euler法

记：$\delta_n = \tilde{y}_n - y_n$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x,y) = (1+\lambda h)y_n,\ \tilde{y}_{n+1} = (1+\lambda h)\tilde{y}_n$$

则：$\delta_{n+1} = (1+\lambda h)\delta_n$

误差的增长居然和函数的增长一样!

实际上，将试验函数带入任何的单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(y_n; h) = E(\lambda h)y_n$$

定义9.4.3（教材编号）

如果满足$|E(\lambda h)| < 1$，则称单步法是**绝对稳定**的；在复平面上λh满足以上条件的区域，称为单步法的**绝对稳定性区域**；与实轴的交集称为**绝对稳定性区间**

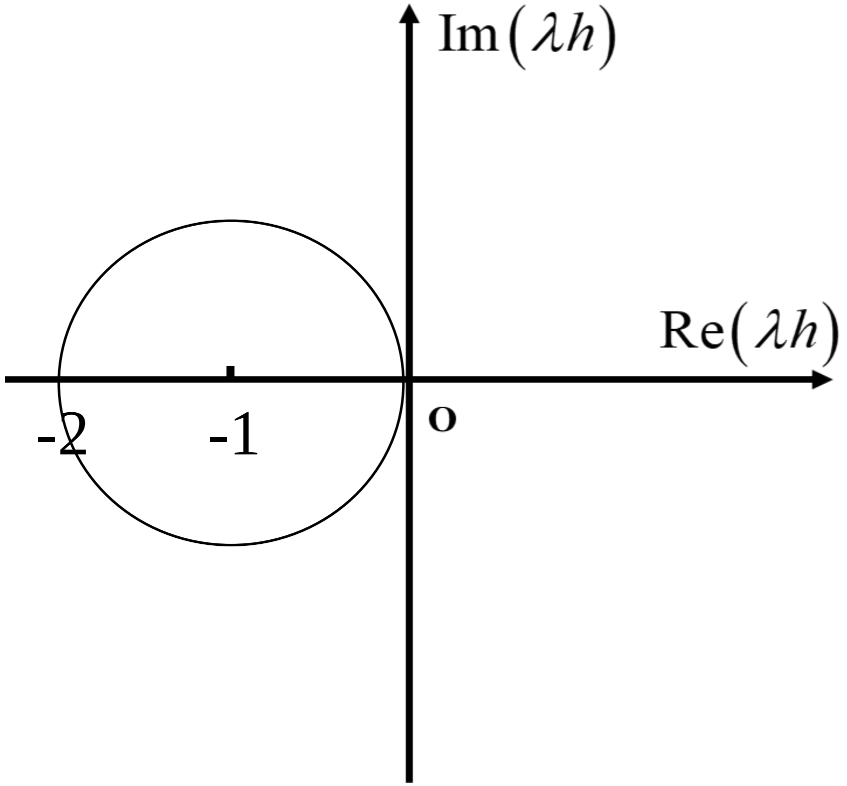
绝对稳定性—绝对稳定性区域

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

因而，显式Euler法的绝对稳定性区域为$|1+\lambda h|<1$

⇨ λh满足在复平面上，以-1为圆心，半径为1的圆内区域

绝对稳定性区间为$\lambda h \in (-2,0)$



$$\frac{\left|\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}\right|}{\left|\tilde{y}_n-y_n\right|}=\left|1+h\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_n,\xi;h)\right|=\left|1+h\frac{\partial f}{\partial y}\right|$$

$$=\left|1+h\frac{\partial(\lambda y)}{\partial y}\right|=\left|1+h\lambda\right|\le 1$$

λ为测试方程中f的**导数**（斜率）

其他函数f局部线性化其实就是在局部检验导数$\frac{\partial f}{\partial y}$

绝对稳定性

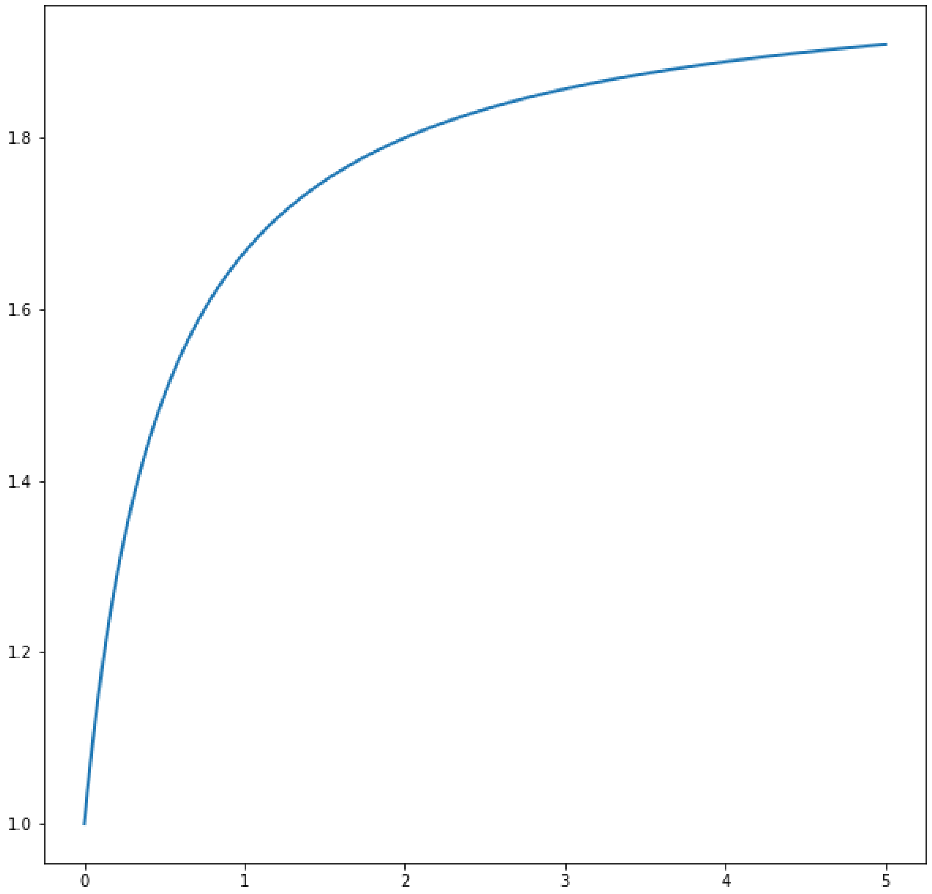
概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

对于方程

$$\frac{dy}{dx}=y-\frac{2x}{y},y(0)=1$$

在任何一个局部

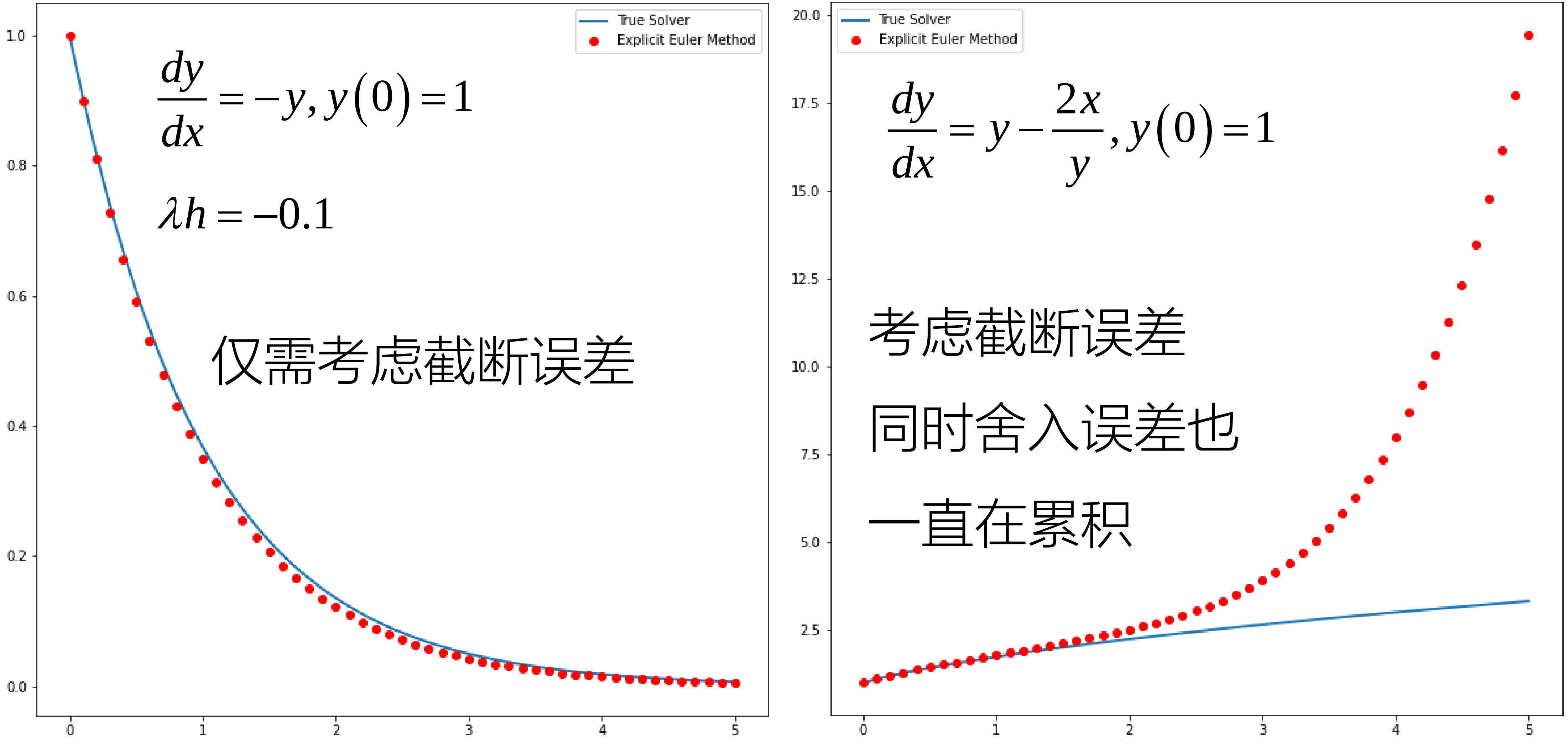
$$\lambda=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=1+\frac{2x}{y^2}=1+\frac{2x}{1+2x}$$



无论怎么取 h，λh都无法满足要求，舍入误差始终会累积

绝对稳定性

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践



绝对稳定性—Runge-Kutta法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$y' = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\lambda) < 0$ 如果取$R=2$

$$K_1 = f\left(x_n, y_n\right) = \lambda y_n$$

$$K_2 = f\left(x_n + a_2 h, y_n + h b_{21} K_1\right) = \lambda\left(y_n + h b_{21} K_1\right) = \lambda\left(y_n + h b_{21} \lambda y_n\right)$$

$$y_{n+1} = y_n + \lambda h C_1 y_n + \lambda h C_2 y_n + (\lambda h)^2 C_2 b_{21} y_n = \underbrace{\boxed{\left[1 + \left(C_1 + C_2\right)\lambda h + C_2 b_{21} (\lambda h)^2\right]}}_{E(\lambda h)} y_n$$

改进Euler法 $E(\lambda h) = 1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 = \frac{1}{2}(1 + \lambda h)^2 + \frac{1}{2} < 1$

绝对稳定性区间为 $\lambda h \in (-2, 0)$

进一步可以推得经典R-K4

$$E(\lambda h) = 1 + \lambda h + \frac{(\lambda h)^2}{2} + \frac{(\lambda h)^3}{3!} + \frac{(\lambda h)^4}{4!} \quad \lambda h \in (-2.785, 0)$$

内容提纲

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

8.1 概论及背景知识

8.2 简单数值方法

8.3 Runge-Kutta法

8.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性

8.5 线性多步法

8.6 一阶方程组与高阶微分方程的初值问题

8.7 编程实践（穿插在各小结中）

多步法—先看2步法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

高阶Runge-Kutta方法可以得到较高的计算精度，但是构造越来越复杂；还有没有可以提高计算精度的方法呢?

同样将$[a,b]$区间分成等间距的n份，有$n+1$个节点

h 为步长

对于微分方程的初值问题，同样采用数值积分

—

$$\int_{y_k}^{y_{k+2}} dy = \int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x,y)\,dx$$

回忆一下单步法

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} dy = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k,y_k)\,dx$$

多步法—先看2步法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$\int_{y_k}^{y_{k+2}} dy = \int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x,y)\,dx \Rightarrow$$

f 在 x_k 和x_{k+2}之间还有一个节点x_{k+1}

Simpson公式！ $$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{(b-a)}{6}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]$$

$$y(x_{k+2})-y(x_k) \approx \frac{\overset{2h}{\boxed{(x_{k+2}-x_k)}}}{6}\left[f(x_k,y(x_k))+4f(x_{k+1},y(x_{k+1}))+f(x_{k+2},y(x_{k+2}))\right]$$

$$y_0 = f(a)$$

$$y_{k+2} = y_k + \frac{h}{3}\boxed{\left[f(x_k,y_k)+4f(x_{k+1},y_{k+1})+f(x_{k+2},y_{k+2})\right]}$$

线性组合

单步法算 y_1

……

2步法　　隐式　　线性2步法

多步法——一般表示形式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

若要计算至y_{n+k}，**k步法**要求已知$y_{n+j}, j=0,1,\dots,k-1$，通用的表达形式为

y_{n+k}也在内

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j}} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j},\ f_{n+j} = f\left(x_{n+j}, y_{n+j}\right)$$

习惯上，令$\alpha_k = 1$，写成递推的格式 $y_{n+k} = -\sum_{j=0}^{k-1}\alpha_j y_{n+j} + h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{n+j}$

初值条件：$y_0 = f(a)$，并用单步法递推至：

$y_j, j=1,2,\dots,k-1$，$k=1$即退化为单步法

$\beta_k = 0$ 显式方法

$\beta_k \neq 0$ 隐式方法

对于隐式法，迭代收敛的条件

$$h|\beta_k|L < 1$$

隐式Euler：$hL < 1$

梯形法：$\frac{hL}{2} < 1$

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

仿照单步法的定义

定义9.5.1（教材编号）

若对于微分方程的初值问题采用如上所述的k步法，有

$$T_{n+k}(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j \boxed{y(x_{n+j})}-h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f\left(x_{n+j},\boxed{y(x_{n+j})}\right)$$ 用的都是真实值

则称线性k步法在x_{n+k}处的**局部截断误差**

$$T_{n+k}(x)=y(x_{n+k})-\boxed{\left[\sum_{j=0}^{k-1}-\alpha_j y(x_{n+j})+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f\left(x_{n+j},y(x_{n+j})\right)\right]}$$

$$=y(x_{n+k})-\left[\sum_{j=0}^{k-1}-\alpha_j y(x_{n+j})+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j y'(x_{n+j})\right]$$

当$y_{n+j}, j=0,1,\ldots,k-1$都准确时，计算近似值$y_{n+k}$

误差分析

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

同样，若对于局部截断误差可以写成

$$T_{n+k}=\underbrace{C_{p+1}h^{(p+1)}(x_n)}_{\text{局部截断误差的主项}}+O\left(h^{(p+2)}\right)$$

相应的线性k步法为**p阶方法**

试着讨论线性2步法的局部截断误差 $y_{n+1}=y_{n-1}+\dfrac{h}{3}[f_{n-1}+4f_n+f_{n+1}]$

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}=\boxed{y(x_{n+1})}-\boxed{y(x_{n-1})}-\frac{h}{3}\left[\boxed{y'(x_{n-1})}+4y'(x_n)+\boxed{y'(x_{n+1})}\right]$$

全都在x_n处Taylor展开

误差分析

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_{n-1})-\frac{h}{3}\left[y'(x_{n-1})+4y'(x_n)+y'(x_{n+1})\right]$$

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+\frac{h^3}{6}y^{(3)}(x_n)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n)+\frac{h^5}{120}y^{(5)}(x_n)+\ldots$$

$$y(x_{n-1})=y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)-\frac{h^3}{6}y^{(3)}(x_n)+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(x_n)-\frac{h^5}{120}y^{(5)}(x_n)+\ldots$$

$$y'(x_{n+1})=y'(x_n)+hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y^{(3)}(x_n)+\frac{h^3}{6}y^{(4)}(x_n)+\frac{h^4}{24}y^{(5)}(x_n)+\ldots$$

$$y'(x_{n-1})=y'(x_n)-hy''(x_n)+\frac{h^2}{2}y^{(3)}(x_n)-\frac{h^3}{6}y^{(4)}(x_n)+\frac{h^4}{24}y^{(5)}(x_n)+\ldots$$

误差分析

$$T_{n+1} = \cancel{2hy'(x_n)} + \cancel{\frac{h^3}{3}y^{(3)}(x_n)} + \frac{h^5}{60}y^{(5)}(x_n) - \frac{h}{3}\left[\cancel{6y'(x_n)} + \cancel{h^2y^{(3)}(x_n)} + \frac{h^4}{12}y^{(5)}(x_n)\right] + \dots$$

$$T_{n+1} = \frac{h^5}{60}y^{(5)}(x_n) - \frac{h^5}{36}y^{(5)}(x_n) + \dots = -\frac{1}{90}h^5y^{(5)}(x_n) + \dots$$

所以，线性2步法的局部截断误差主项为：$\frac{1}{90}h^5y^{(5)}(x_n)$

该方法是4阶方法

回忆一下Simpson求积公式的余项：$E_2 = -\frac{h^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$

Adams法—显式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

多步法的一般迭代式：

构造的核心是如何确定参数α_j, β_j,其中$j = 0,1,\ldots,k$, $\alpha_k = 1$

假定已计算至x_{n+k-1}，对于x_{n+k}节点，考虑$[x_{n+k-1}, x_{n+k}]$区间内的积分

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-1}) = \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} f(x, f(x))dx$$

之前：用$x_{n+k-2}, x_{n+k-1}, \boxed{x_{n+k}}$构造了Simpson求积

包含当前节点

现在：用$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}$构造$k$-1次Lagrange插值多项式

$$L_{k-1}(x) = f(x_n, y(x_n))l_0(x) + \ldots + f(x_{n+k-1}, y(x_{n+k-1}))l_{k-1}(x) \qquad l_j = \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq j}}^{k-1} \left(\frac{x - x_{n+l}}{x_{n+j} - x_{n+l}} \right)$$

显式方法

Adams法—显式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

用该插值多项式带入积分

$$L_{k-1}(x)=f\left(x_n,y(x_n)\right)l_0(x)+\ldots+f\left(x_{n+k-1},y(x_{n+k-1})\right)l_{k-1}(x)$$

$$y(x_{n+k})-y(x_{n+k-1})\approx\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}}L_{k-1}dx=f\left(x_n,y(x_n)\right)\boxed{\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}}l_0 dx}+\ldots+f\left(x_{n+k-1},y(x_{n+k-1})\right)\boxed{\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}}l_{k-1}dx}$$

令： $\beta_j=\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}}l_j(x)dx,\ j=0,1,\ldots,k-1$

不包含y_{n+k}，显式法

$$y_{n+k}\approx y_{n+k-1}+h\sum_{j=0}^{\boxed{k-1}}\beta_j f_{n+j}$$

关键点在于计算

$$\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}}l_j(x)dx,\ j=0,1,\ldots,k-1$$

显式Adams方法，也称Adams-Bashsorth方法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

如果$k=1$，即用y_n推y_{n+1}

$$y_{n+1}=y_n+h\beta_0 f_n \qquad \beta_0=\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} l_0 dx=\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} dx=1$$

显式Euler方法！

如果$k>1$，和Newton-Cotes类似的导出方式

$$x=x_n+th \xrightarrow{\quad} \prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1} h(t-l)$$

$$\beta_j=\frac{1}{h}\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} l_j dx=\frac{1}{h}\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}}\prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1}\left(\frac{x-x_{n+l}}{x_{n+j}-x_{n+l}}\right)dx=\frac{1}{\cancel{h}}\frac{1}{\boxed{\prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1}\left(x_{n+j}-x_{n+l}\right)}}\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}}\boxed{\prod_{\substack{l=0\\l\neq j}}^{k-1}\left(x-x_{n+l}\right)}dx$$

$$jh\ldots\times h\times(-h)\ldots\times(k-1-j)h$$

$$C_1\cancel{h}^{k-1} \qquad \cancel{h}^k\boxed{\int_{k-1}^{k} t(t-1)\ldots(t-k+1)dt}$$

$$C_2$$

同样道理，β_j仅和步数k有关！

Adams法—显式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

如果$k=2$

$$y_{n+2}=y_{n+1}+h\beta_0 f_n+h\beta_1 f_{n+1}$$

$$\beta_0=\frac{1}{h}\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} l_0 dx=\frac{1}{h}\frac{1}{x_n-x_{n+1}}\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}\left(x-x_{n+1}\right)dx=-\frac{1}{h^2}h^2\int_1^2(t-1)dt=-\left(\frac{1}{2}t^2-t\right)_1^2=-\frac{1}{2}$$

$$\beta_1=\frac{1}{h}\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} l_1 dx=\frac{1}{h}\frac{1}{x_{n+1}-x_n}\int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}}\left(x-x_n\right)dx=\frac{1}{h^2}h^2\int_1^2 tdt=\left(\frac{1}{2}t^2\right)_1^2=\frac{3}{2}$$

$$y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{h}{2}\left(3f_{n+1}-f_n\right)$$

Adams法—显式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$T_{n+2}=y(x_{n+2})-y_{n+2}=y(x_{n+2})-y(x_{n+1})-\frac{h}{2}\left[3y'(x_{n+1})-y'(x_n)\right]$$

$$=\cancel{y(x_n)}+\cancel{2hy'(x_n)}+\frac{(2h)^2}{2}\cancel{y''(x_n)}+\frac{(2h)^3}{6}y'''(x_n)$$

$$-\left(\cancel{y(x_n)}+\cancel{hy'(x_n)}+\frac{h^2}{2}\cancel{y''(x_n)}+\frac{h^3}{6}y'''(x_n)\right)-\frac{h}{2}\left[3\left(\cancel{y'(x_n)}+\cancel{hy''(x_n)}+\frac{h^2}{2}y'''(x_n)\right)-\cancel{y'(x_n)}\right]$$

$$=\left(\frac{8}{6}-\frac{1}{6}-\frac{3}{4}\right)h^3y'''(x_n)=\frac{5}{12}h^3y'''(x_n)+\dots$$

该方法是**2阶**方法，确实与改进Euler法相近

更加高阶的显式Adams方法系数可以参考教材P303-表9.5

Adams法—隐式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

显式Adams方法用$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}$构造的插值多项式求$[x_{n+k-1}, x_{n+k}]$区间的积分，本质上包含了**插值多项式的外推**，求解精度由此会受影响

若直接用$x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}, x_{n+k}$这**$k$+1**个节点构造**$k$阶**多项式：$L_k(x) = f(x_n, y(x_n)) l_0(x) + \ldots + f(x_{n+k}, y(x_{n+k})) l_k(x)$

$$y(x_{n+k}) - y(x_{n+k-1}) \approx \int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} L_k(x)dx = f(x_n, y(x_n)) \boxed{\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} l_0(x)dx} + \ldots + f(x_{n+k}, y(x_{n+k})) \boxed{\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} l_k(x)dx}$$

$$y(x_{n+k}) \approx y(x_{n+k-1}) + h[\beta_0 f_n + \ldots + \beta_k \boxed{f_{n+k}}]$$

隐式格式

隐式Adams方法，也称Adams-Moulton方法

Adams法—隐式

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

如果$k=1$，即用y_n推y_{n+1}：$y_{n+1}=y_n+h\beta_0 f_n+h\beta_1 f_{n+1}$

$$\beta_0=\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} l_0 dx=\frac{1}{h}\frac{1}{x_n-x_{n+1}}\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_{n+1})dx=-\frac{1}{h^2}h^2\int_0^1(t-1)dt=\frac{1}{2}$$

$$\beta_1=\frac{1}{h}\int_{x_n}^{x_{n+1}} l_1 dx=\frac{1}{h}\frac{1}{x_{n+1}-x_n}\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x_n)dx=\frac{1}{h^2}h^2\int_0^1 t dt=\frac{1}{2}$$

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f_n+f_{n+1}]$ 就是梯形方法 **2阶，比显式k=1高1阶！**

更加高阶的隐式Adams方法系数可以参考教材P304-表9.6

同k值下，均比显式高1阶

待定系数法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

构造高阶Adams方法的时，如同Newton-Cotes求积一样，如下的积分计算越来越困难

$$\int_{x_{n+k-1}}^{x_{n+k}} l_i(x)\,dx,\ j=0,1,\dots,k-1$$

此时，我们可以仿照Runge-Kutta法构造过程，用Taylor展开后，凑系数的方式实现

假定k步法的局部截断误差

$$T_{n+k}(x)=y(x_{n+k})-\left[\sum_{j=0}^{k-1}-\alpha_j y(x_{n+j})+h\sum_{j=0}^{k}\beta_j y'(x_{n+j})\right]$$

$$=y(x_{n+k})+\alpha_0 y(x_n)+\dots+\alpha_{k-1}y(x_{n+k-1})-h\left[\beta_0 y'(x_n)+\dots+\beta_k y'(x_{n+k})\right]$$

待定系数法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$y(x_{n+j}) = y(x+jh) = y(x_n) + jhy'(x_n) + \frac{(jh)^2}{2!}y''(x_n) + \frac{(jh)^3}{3!}y'''(x_n) + \dots$$

$$y'(x_{n+j}) = y'(x+jh) = y'(x_n) + jhy''(x_n) + \frac{(jh)^2}{2!}y'''(x_n) + \frac{(jh)^3}{3!}y^{(4)}(x_n) + \dots$$

$$T_{n+k}(x) = y(x_{n+k}) + \alpha_0 y(x_n) + \dots + \alpha_{k-1}y(x_{n+k-1}) - h\left[\beta_0 y'(x_n) + \dots + \beta_k y'(x_{n+k})\right]$$

$$= c_0 y(x_n) + c_1 h y'(x_n) + \dots + c_l h^l y^{(l)}(x_n) + \dots$$

$$c_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_k \qquad c_1 = \sum_{j=0}^{k} j\alpha_k - \sum_{j=0}^{k}\beta_k \qquad c_2 = \frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{k} j^2\alpha_k - \sum_{j=0}^{k} j\beta_k$$

$$c_3 = \frac{1}{3!}\sum_{j=0}^{k} j^3\alpha_k - \frac{1}{2!}\sum_{j=0}^{k} j^2\beta_k \qquad c_l = \frac{1}{l!}\sum_{j=0}^{k} j^l\alpha_k - \frac{1}{(l-1)!}\sum_{j=0}^{k} j^{l-1}\beta_k \qquad \dots\dots$$

待定系数法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

若要求4步算法达到4阶，意味着$T_{n+k}=C_5h^5f^{(5)}(x_n)+\ldots$

即：$c_0=c_1=\ldots=c_4=0$

$$\begin{cases} c_0=\sum_{j=0}^{4}\alpha_j=0 \\ c_1=\sum_{j=0}^{4}j\alpha_k-\sum_{j=0}^{4}\beta_k=0 \\ c_2=\sum_{j=0}^{4}j^2\alpha_k-2\sum_{j=0}^{4}j\beta_k=0 \\ c_3=\sum_{j=0}^{4}j^3\alpha_k-3\sum_{j=0}^{4}j^2\beta_k=0 \\ c_4=\sum_{j=0}^{4}j^4\alpha_k-4\sum_{j=0}^{4}j^3\beta_k=0 \end{cases}$$

10个未知数，5个方程，严重不够！

①通用条件 $\alpha_4=1$ ②显式条件 $\beta_4=0$

若取$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=0$，则$\alpha_3=-1$

$$y_{n+4}=y_{n+3}+\frac{h}{24}(55f_{n+3}-59f_{n+2}+37f_{n+1}-9f_n)$$

4步显式Adams方法

若取$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$，则$\alpha_0=-1$

$$y_{n+4}=y_n+\frac{4h}{3}(2f_{n+3}-f_{n+2}+2f_{n+1})$$

Milne方法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

若要求3步算法达到4阶，意味着$T_{n+k}=C_5h^5f^{(5)}(x_n)+\dots$

即： $c_0=c_1=\dots=c_4=0$

$$\begin{cases} c_0=\sum_{j=0}^{\boxed{3}}\alpha_j=0 \\ c_1=\sum_{j=0}^{3}j\alpha_k-\sum_{j=0}^{3}\beta_k=0 \\ c_2=\sum_{j=0}^{3}j^2\alpha_k-2\sum_{j=0}^{3}j\beta_k=0 \\ c_3=\sum_{j=0}^{3}j^3\alpha_k-3\sum_{j=0}^{3}j^2\beta_k=0 \\ c_4=\sum_{j=0}^{3}j^4\alpha_k-4\sum_{j=0}^{3}j^3\beta_k=0 \end{cases}$$

8个未知数，5个方程，严重不够！

①通用条件 $\alpha_4=1$ ② $\beta_0=0,\alpha_1=0$

$$y_{n+3}=\frac{1}{8}(9y_{n+2}-y_n)+\frac{3}{8}h(\boxed{f_{n+3}}+2f_{n+2}-f_{n+1})$$

隐式格式

Hamming方法

以上所有方法都是4阶方法，且系数C_5的导出完全可以参考Adams方法中相同的思路！

预估-校正法

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

通过待定系数法，我们可以方便的推导各种高阶格式的多步法，其中**显式格式**计算简单，但是同步数精度低1阶；**隐式格式**精度高，但是需要迭代计算

有没有折中方案呢?

回忆一下改进Euler法

①显式Euler： $y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$ **预估**

②计算函数值： $f_{n+1}^{(0)} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right)$

③一步梯形公式： $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f_n + f_{n+1}^{(0)}\right]$ **校准**

这一思路也完全可以用于多步法！

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

Adams-Bashforth-Moulton方法

4步显式Adams方法做预估，3步隐式Adams方法做校正

P（预估） $y_{n+4}^{(0)} = y_{n+3} + \dfrac{h}{24}\left(55 f_{n+3} - 59 f_{n+2} + 37 f_{n+1} - 9 f_n\right)$

E（求值） $f_{n+4}^{(0)} = f\left(x_{n+4}, y_{n+4}^{(0)}\right)$

C（校正） $y_{n+4} = y_{n+3} + \dfrac{h}{24}\left(9 f_{n+4}^{(0)} + 19 f_{n+3} - 5 f_{n+2} + f_{n+1}\right)$

E（求值） $f_{n+4} = f\left(x_{n+4}, y_{n+4}\right)$

matlab函数: ode113

查表可知两步的局部截断误差分别为

$$\begin{cases} y(x_{n+4}) - y_{n+4}^{(0)} \approx \dfrac{251}{720} h^5 \boxed{y^{(5)}(\xi)} \\ y(x_{n+4}) - y_{n+4} \approx -\dfrac{19}{720} h^5 \boxed{y^{(5)}(\eta)} \end{cases}$$

近似相等

预估-校正法（修正预估-校正格式）

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

$$y(x_{n+4})-y_{n+4}^{(0)}\approx-\frac{251}{19}\left[y(x_{n+4})-y_{n+4}\right]=-\frac{251}{19}\left[y(x_{n+4})-y_{n+4}^{(0)}+y_{n+4}^{(0)}-y_{n+4}\right]$$

$$\Rightarrow\ \frac{270}{19}\left[y(x_{n+4})-y_{n+4}^{(0)}\right]\approx\frac{251}{19}\left[y_{n+4}-y_{n+4}^{(0)}\right]\quad\Rightarrow\ y(x_{n+4})-y_{n+4}^{(0)}\approx\frac{251}{270}\left[y_{n+4}-y_{n+4}^{(0)}\right]$$

同理可得：$y(x_{n+4})-y_{n+4}\approx-\frac{19}{270}\left[y_{n+4}-y_{n+4}^{(0)}\right]$

由此可见

用 $y_{n+4}^{(0)}+\frac{251}{270}\left[y_{n+4}-y_{n+4}^{(0)}\right]$ 代替 $y_{n+4}^{(0)}$

用 $y_{n+4}-\frac{19}{270}\left[y_{n+4}-y_{n+4}^{(0)}\right]$ 代替 y_{n+4}

都将更加接近真值：$y(x_{n+4})$

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

从而导出**修正预估-校正格式**

P（预估） $$y_{n+4}^{(0)} = y_{n+3} + \frac{h}{24}\left(55 f_{n+3} - 59 f_{n+2} + 37 f_{n+1} - 9 f_n\right)$$

M（修正） $$\bar{y}_{n+4}^{(0)} = y_{n+4}^{(0)} + \frac{251}{270}\left[y_{n+4} - y_{n+4}^{(0)}\right]$$

E（求值） $$\bar{f}_{n+4}^{(0)} = f\left(x_{n+4}, \bar{y}_{n+4}^{(0)}\right)$$

C（校正） $$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}\left(9 \bar{f}_{n+4}^{(0)} + 19 f_{n+3} - 5 f_{n+2} + f_{n+1}\right)$$

M（修正） $$\bar{y}_{n+4} = y_{n+4} - \frac{19}{270}\left[y_{n+4} - y_{n+4}^{(0)}\right]$$

E（求值） $$f_{n+4} = f\left(x_{n+4}, \bar{y}_{n+4}\right)$$

其他预估-校正格式及多步法的相容性、收敛性、稳定性略

内容提纲

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

8.1 概论及背景知识
8.2 简单数值方法
8.3 Runge-Kutta法
8.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性
8.5 线性多步法
8.6 一阶方程组与高阶微分方程的初值问题
8.7 编程实践（穿插在各小结中）

一阶常微分方程组

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

考虑一阶常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \dots, y_m) \end{cases}, x \in (x_0, X]$$

给定初值条件

$$\begin{cases} y_1(x_0) = a_1 \\ y_1(x_0) = a_2 \\ \quad\vdots \\ y_m(x_0) = a_m \end{cases}$$

可以将以上方程写成向量形式

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{y}}{dx} = \vec{f}(x, \vec{y}) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{a} \end{cases}$$

以上讨论的数值方法都可以推广

一阶常微分方程组

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

梯形方法 $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{2}h\left[\vec{f}(x_n, \vec{y}_n) + \vec{f}(x_{n+1}, \vec{y}_{n+1})\right]$

R-K四级四阶方法

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{1}{6}h\left[\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4\right]$$

$$\vec{K}_1 = \vec{f}(x_n, \vec{y}_n)$$

$$\vec{K}_2 = \vec{f}\left(x_n + \frac{1}{2}h, \vec{y}_n + \frac{1}{2}h\vec{K}_1\right)$$

$$\vec{K}_3 = \vec{f}\left(x_n + \frac{1}{2}h, \vec{y}_n + \frac{1}{2}h\vec{K}_2\right)$$

$$\vec{K}_4 = \vec{f}\left(x_n + h, \vec{y}_n + h\vec{K}_3\right)$$

3步显式Adams方法 $\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \frac{h}{12}\left(23\vec{f}_n - 16\vec{f}_{n-1} + 5\vec{f}_{n-2}\right)$

概论
- 研究问题
- 背景知识

简单数值方法
- 欧拉法
- 梯形方法
- 误差分析
- 小结

R-K法
- 基本思路
- 显式R-K法
- 隐式R-K法

收敛与稳定分析
- 相容性
- 收敛性
- 绝对稳定性

线性多步法
- 多步法
- 误差分析
- Adams法
- 待定系数法
- 预估-校正

方程组与高阶
- 一阶方程组
- **高阶微分方程**

编程实践

高阶微分方程**初值**问题：化为一阶方程组的初值问题

$$\begin{cases} F\left(x,y,y',\dots,y^{(m)}\right)=0 \\ y(x_0)=a_1,\, y'(x_0)=a_2,\dots,y^{(m-1)}(x_0)=a_m \end{cases} \xrightarrow{\text{提出}y^{(m)}\text{项}} \begin{cases} y^{(m)}=f\left(x,y,y',\dots,y^{(m-1)}\right) \\ y(x_0)=a_1,\, y'(x_0)=a_2,\dots,y^{(m-1)}(x_0)=a_m \end{cases}$$

令： $y_1=y, y_2=y',\dots,y_m=y^{(m-1)}$

方程化为
$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=y_3 \\ \quad\vdots \\ y_{m-1}'=y_m \\ y_m'=y^{(m)}=f\left(x,y_1,y_2,\dots,y_m\right) \end{cases}$$

初值
$$\begin{cases} y_1(x_0)=y(x_0)=a_1 \\ y_2(x_0)=y'(x_0)=a_2 \\ \quad\vdots \\ y_{m-1}(x_0)=y^{(m-2)}(x_0)=a_{m-1} \\ y_m(x_0)=y^{(m-1)}(x_0)=a_m \end{cases}$$

内容提纲

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

8.1 概论及背景知识
8.2 简单数值方法
8.3 Runge-Kutta法
8.4 单步法的相容性、收敛性和绝对稳定性
8.5 线性多步法
8.6 一阶方程组与高阶微分方程的初值问题
8.7 编程实践（穿插在各小结中）

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ 显式Adams方法（Adams类）

```
public static Tuple<Vector, Vector> Explicit(BinaryFunction f, Vector X0, Vector Y0,
    double xn, double h, int step = 1)
{
    // ……
    int dex = step;
    Action core;
    if (step == 1)
        core = () => ys[dex] = ys[dex - 1] + h * ks[dex - 1];
    else if (step == 2)
        core = () => ys[dex] = ys[dex - 1] + h / 2 * (3 * ks[dex - 1] - ks[dex - 2]);
    // ……
    for (; dex < n; dex++)
    {
        xs[dex] = xs[dex - 1] + h;
        core();
        ks[dex] = f(xs[dex], ys[dex]);
    }

    return new Tuple<Vector, Vector>(xs, ys);
}
```

$\boldsymbol{k_i = f(x_i, y_i)}$

$xs = [x_0, x_1, \cdots, x_n]^T$

$ys = [y_0, y_1, \cdots, y_n]^T$

$\boldsymbol{ks = [k_0, k_1, \cdots, k_n]^T}$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(3k_{i-1} - k_{i-2})$$

k	p	方法
1	1	$y_{n+1} = y_n + hf_n$
2	2	$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$
3	3	$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$
4	4	$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$

$k_i = f(x_i, y_i)$

清華大学 深圳国际研究生院
Tsinghua Shenzhen International Graduate School
海洋工程研究院 胡振中 《工程硕士数学》 第八章

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ 隐式Adams方法（Adams类）

$$y_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}(k_i + k_{i-1}) = y_{i-1} + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + k_{i-1}]$$

```
public static Tuple<Vector, Vector> Implicit(BinaryFunction f, Vector X0, Vector Y0,
    double xn, double h, int step = 1)
{
    // ……
    if (step == 1)
        core = () => ys[dex] = FixedPoint.Steffensen(
            y => ys[dex - 1] + h / 2 * (f(xs[dex], y) + ks[dex - 1]),
            ys[dex - 1] + h * ks[dex - 1]);
    else if (step == 2)
        core = () => ys[dex] = FixedPoint.Steffensen(
            y => ys[dex - 1] + h / 12 * (5 * f(xs[dex], y) + 8 * ks[dex - 1] - ks[dex - 2]),
            ys[dex - 1] + h * ks[dex - 1]);
    else if (step == 3)
        core = () => ys[dex] = FixedPoint.Steffensen(
            y => ys[dex - 1] + h / 24 * (9 * f(xs[dex], y) + 19 * ks[dex - 1] -
            5 * ks[dex - 2] + ks[dex - 3]),
            ys[dex - 1] + h * ks[dex - 1]);
    // ……
    return new Tuple<Vector, Vector>(xs, ys);
}
```

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

✓ 一阶方程组（ODES类）

```
public static Tuple<Vector, Vector[]> RungeKutta4(Func<double, Vector, Vector> f,
    double x0, Vector Y0, double xn, double h)
{
    // ......

    double half = h / 2;
    Func<double, Vector, Vector>  core = (x, Y) =>
    {
        Vector K1 = f(x, Y);
        Vector K2 = f(x + half, Y + half * K1);
        Vector K3 = f(x + half, Y + half * K2);
        Vector K4 = f(x + h, Y + h * K3);
        return Y + h / 6 * (K1 + 2 * K2 + 2 * K3 + K4);
    };

    // ......
    return new Tuple<Vector, Vector[]>(xs, Ys);
}
```

与原来的经典Runge-Kutta方法几乎一样，
区别在于 f 以及 core 的输入和输出

(double, Vector) → Vector

$$\begin{cases} Y' = f(x, Y) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_i, Y_i) \\ K_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_i + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 = f(x_i + h, Y_i + hK_3) \end{cases}$$

另外也实现了隐式的**Trapzoid**方法

学习重点

概论
研究问题
背景知识
简单数值方法
欧拉法
梯形方法
误差分析
小结
R-K法
基本思路
显式R-K法
隐式R-K法
收敛与稳定分析
相容性
收敛性
绝对稳定性
线性多步法
多步法
误差分析
Adams法
待定系数法
预估-校正
方程组与高阶
一阶方程组
高阶微分方程
编程实践

- 理解**微分方程、常微分方程（及其初值问题）**的概念
- 掌握**简单数值方法**的思路、求解方法和误差分析方法
- 理解**R-K方法**的思路
- 掌握**经典R-K方法**的计算过程
- 理解单步法**收敛性**和**绝对稳定性**的分析思路
- 掌握**Adams方法**的计算过程

作业

教材P326-10、12